Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.

Von Dr. A. Heyting
in Enschede (Niederlande).

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 19. Dezember 1929 [s. Jahrg. 1929 S. 686].)

Einleitung.

Die intuitionistische Mathematik ist eine Denktätigkeit, und jede Sprache, auch die formalistische, ist für sie nur Hilfsmittel zur Mitteilung. Es ist prinzipiell unmöglich, ein System von Formeln aufzustellen, das mit der intuitionistischen Mathematik gleichwertig wäre, denn die Möglichkeiten des Denkens lassen sich nicht auf eine endliche Zahl von im voraus aufstellbaren Regeln zurückführen. Der Versuch, die wichtigsten Teile der Mathematik in Formelsprache wiederzugeben[1], wird deshalb ausschließlich gerechtfertigt durch die größere Bündigkeit und Bestimmtheit der letzteren gegenüber der gewöhnlichen Sprache, Eigenschaften, welche sie geeignet machen, das Eindringen in die intuitionistischen Begriffe und ihre Verwendung bei Untersuchungen zu erleichtern.

Zum Aufbau der Mathematik ist die Aufstellung allgemeingültiger logischer Gesetze nicht notwendig; diese Gesetze werden in jedem einzelnen Fall gleichsam von neuem entdeckt als gültig für das eben betrachtete mathematische System. Die sprachliche Mitteilung aber, nach den Bedürfnissen des täglichen Lebens gebildet, schreitet in der Form der logischen Gesetze, welche sie als gegeben voraussetzt, fort. Eine Sprache, welche dem Gang der intuitionistischen Mathematik von Schritt zu Schritt nachgebildet wäre, würde so in allen Teilen von der gewohnten Form abweichen, daß sie die obengenannten günstigen Eigenschaften wieder gänzlich verlieren müßte. Diese Überlegungen haben mich dazu geführt, die Formalisierung der intuitionistischen Mathematik doch wieder mit einem Aussagenkalkül anzufangen.

Die Formeln des formalistischen Systems entstehen aus einer endlichen Zahl von Axiomen durch Anwendung einer endlichen Zahl von Operationsregeln. Sie enthalten außer den »konstanten« Zeichen auch Variabele. Das Verhältnis zwischen diesem System und der Mathematik ist nun dieses, daß bei einer bestimmten Interpretation der Konstanten und unter bestimmten Beschränkungen hinsichtlich der Ersetzung der Variabeln jede Formel einen richtigen mathematischen Satz darstellt. (Z. B. müssen die Variabeln im Aussagenkalkül nur durch sinnerfüllte mathematische Aussagen ersetzt werden.) Ist das System so beschaffen, daß es die letztgenannte Forderung erfüllt, so

[1] Diese Abhandlung bildet eine Umarbeitung des ersten Teiles einer von dem »Wiskundig Genootschap« in Amsterdam im Anfang 1928 gekrönten Preisschrift.

ist auch seine *Widerspruchsfreiheit* gewährleistet, in diesem Sinne, daß es keine Formel enthalten kann, die bei jener Interpretation einen widerspruchsvollen Satz darstellen würde.

Man kann auch das formalistische System an sich mathematisch betrachten, ohne an eine Interpretation zu denken. Die Widerspruchsfreiheit erhält dann eine andere Bedeutung, indem der Widerspruch als eine bestimmte Formel definiert wird; diese Betrachtungsweise tritt für uns hinter die vorige zurück. Hierher gehören aber die Fragen nach der Unabhängigkeit und Vollständigkeit des Axiomensystems. Im Anhang beweise ich, daß die Axiome meines Aussagenkalküls voneinander unabhängig sind. Die Vollständigkeit (im engeren Sinne) besagt[1], daß nach Hinzufügung einer bisher nicht ableitbaren Formel jede beliebige Formel ableitbar wäre. Sie kann für unser System nicht bestehen, weil immer noch die Formel $\neg\neg a \supset a$ (wenn der Satz a unmöglich falsch sein kann, so ist er richtig) hinzugefügt werden kann (s. Anhang, Gruppe XII). Die Vollständigkeit im weiteren Sinne, welche besagt, daß jede Formel, welche eine richtige Beziehung zwischen Aussagen darstellt, aus den Axiomen gefolgert werden kann, und welche also wieder auf die mathematische Interpretation des Formelsystems Bezug nimmt, kann, wie schon oben bemerkt worden ist, aus prinzipiellen Gründen nicht gefordert werden.

Nachträgliche Bemerkung. Wie Hr. Glivenko inzwischen bewiesen hat, (Acad. r. de Belgique, Bull. de la Classe des Sciences, s. 5, t. 15, 1929, p. 183) ist das System vollständig im Sinn der folgenden Eigenschaften:

1. Wenn der Satz a in der klassischen Logik beweisbar ist, so ist der Satz, »a kann nicht falsch sein«, es in unserem System.

2. Wenn der Satz, »a ist falsch«, in der klassischen Logik beweisbar ist, so ist er es auch in unserem System.

Das folgende formalistische System, aus den numerierten Regeln und Formeln bestehend, ist für sich allein lesbar; die *Bemerkungen* sind nur hinzugefügt, um den Zusammenhang mit der Mathematik zu erläutern und bemerkenswerte Formeln hervorzuheben. Die Beweise sind nur angedeutet; oft habe ich mich darauf beschränkt, die wichtigsten der angewandten Formeln zwischen [ ] anzugeben. Eine weitere Vereinfachung ist erreicht, indem ich schreibe: $a \supset b \supset c \supset d$, wo gemeint ist: Aus a folgt b; aus a und b folgt c; aus a, b und c folgt d. Auch gebrauche ich die Abkürzung »$\vdash p \supset \vdash q$« für »$\vdash p$ und $\vdash p \supset q$, also $\vdash q$«. (Vgl. Russell and Whitehead I, S. 9.)

Es werden *vier Grundbegriffe* eingeführt, nämlich:

$a \supset b$, »aus a folgt b«.

$a \wedge b$, »a und b«.

$a \vee b$, »a oder b«.

$\neg a$, »nicht a«[2].

[1] Vgl. Hilbert und Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, S. 33.

[2] Das üblichere $\sim$ wird zu mehreren Zwecken gebraucht; außerdem weichen die Formeln, welche die Negation enthalten, am meisten von denen der klassischen Logik ab. Deshalb wähle ich für die Negation ein neues Zeichen.

Die intuitionistische Logik unterscheidet sich von der klassischen schon dadurch, daß in ihr keiner dieser vier Begriffe durch die andern definiert werden kann. Die folgenden Sätze sind zwar richtig, ihre Umkehrungen aber sämtlich unbeweisbar.

4. 46. $\vdash \cdot \neg a \vee b \supset \cdot a \supset b$.

4. 9. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \neg (a \wedge \neg b)$.

4. 47. $\vdash \cdot a \vee b \supset \cdot \neg a \supset b$.

4. 91. $\vdash \cdot a \vee b \supset \neg (\neg a \wedge \neg b)$.

3. 6. $\vdash : a \vee b \supset : a \supset b \cdot \supset b$.

4. 92. $\vdash \cdot a \wedge b \supset \neg (\neg a \wedge \neg b)$.

Die Formel $a \supset b$ bedeutet im allgemeinen: »Wenn a richtig ist, so ist auch b richtig.« Diese Aussage hat schon einen Sinn, wenn a und b konstante Aussagen sind, über deren Richtigkeit nichts bekannt zu sein braucht; wenn a und b auch Variabele enthalten, sagt sie etwa aus: »Wenn für eine bestimmte Ersetzung der Variabeln a richtig ist, so ist für diese auch b richtig.« Der Fall ist denkbar, daß, nachdem der Satz $a \supset b$ im angegebenen Sinne bewiesen ist, sich später zeigt, daß b immer richtig ist. Die einmal angenommene Formel $a \supset b$ muß dann richtig bleiben, d. h. wir müssen dem Zeichen $\supset$ eine solche Bedeutung beilegen, daß $a \supset b$ auch jetzt noch gilt. Entsprechendes kann bemerkt werden, falls sich nachträglich zeigt, daß a immer falsch ist. Aus diesen Gründen sind die Formeln

2. 14. $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b$ und 4. 1. $\vdash \cdot \neg a \supset \cdot a \supset b$

aufgenommen.

§§ 2 und 3 weichen wenig von der klassischen Logik ab und sind nur der Vollständigkeit wegen aufgenommen. In § 2 verweise ich, nachdem die von Peano als Axiome angenommenen Sätze bewiesen sind, für die weiteren Beweise auf dessen »Formulaire de mathématiques« tome 1 (1895). § 4 weicht stark von der klassischen Logik ab. Den Schein, daß die dort hervortretenden Unterschiede eigentlich den wichtigsten Streitpunkt zwischen Intuitionisten und Formalisten bilden (welcher schon durch die am Anfang gemachte Bemerkung widerlegt wird), konnte ich hier nicht vermeiden, weil der Formalismus ungeeignet ist, die mehr fundamentalen Streitpunkte auszudrücken.

Von der Literatur sind am meisten gebraucht:

Peano, Formulaire de mathématiques (zitiert als »Form.« mit Band-, Kapitel-, Paragraph- und Formelnummer).

Russell and Whitehead, Principia mathematica.

Hilbert und Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik.

P. Bernays, Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der »Principia mathematica«, Math. Zeitschr. 25 (1926) S. 305.

V. Glivenko, Sur la logique de M. Brouwer, Bulletins de l'Acad. royale de Belgique, 5e série, tome XIV (1928) S. 225.

§ 1. Operationsregeln.

1.1. Um anzugeben, daß eine Formel auf die Liste der »richtigen Formeln« gebracht ist, wird das Zeichen $\vdash$ davor gesetzt. Ist die Formel ein Axiom, d. h. ist sie willkürlich als richtig angenommen, so wird dies durch Verdoppelung des Zeichens $\vdash$ angegeben.

1.2. Sind a und b richtige Formeln, so ist $a \wedge b$ eine richtige Formel.

1.3. Sind a und $a \supset b$ richtige Formeln, so ist b eine richtige Formel.

1.4. Die Formel »Const. a« am Anfang eines Paragraphen bedeutet, daß das Zeichen a eine Konstante ist. Jedes Zeichen, das nicht in dieser Weise als Konstante eingeführt ist, ist eine Variabele. Aus einer richtigen Formel entsteht wieder eine richtige Formel, wenn man eine Variabele überall zugleich durch eine andere Zeichenkombination ersetzt.

1.5. $\binom{p}{x}$ a ist die Formel, welche aus der Formel a entsteht, indem man die Variabele x (wenn diese in a vorkommt) überall durch die Zeichenkombination p ersetzt.

1.6. Die Formel $a \overline{\overline{D}} b$ heißt eine Definition; sie bedeutet, daß aus einer richtigen Formel wieder eine richtige Formel entsteht, indem man die Zeichenkombination a durch b ersetzt oder umgekehrt, auch wenn das nicht überall zugleich geschieht.

Bemerkungen. Zu 1.2. Daß diese Regel notwendig ist, liegt an der gewählten Form der Axiome. Stellt man diese so auf, daß man 1.2 nicht braucht, so werden die Beweise verwickelter.

Zu 1.5. Diese Regel wird in diesem Artikel nur in den Beweisen gebraucht.

Zu 1.4. Im Aussagenkalkül werden die Variabeln durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet.

Zu 1.6. Die Numerierung der Definitionen läuft unabhängig neben derjenigen der übrigen Formeln; sie sind erkennbar gemacht durch Wiederholung der Nummer am Rande.

Die Einteilung der Formeln geschieht wie üblich durch Punkte. Die Zahl der Punkte wird herabgesetzt durch die Verabredung, daß die Zeichen $\wedge$ und $\vee$ stärker binden als die übrigen. Der Teil einer Formel, auf den sich ein Zeichen $\neg$ bezieht, ist, wenn notwendig, in ( ) gesetzt. Das Gebiet eines Assertionszeichens $\vdash$ reicht so weit, bis eine größere Zahl von Punkten auftritt als die, von der es begleitet wird.

§ 2. Const. $\cdot$, :, $:\cdot$, ::, $\supset$, $\wedge$, $\supset\subset$, (,), $\overline{\overline{D}}$.

2.1. $\vdash\vdash \cdot a \supset a \wedge a$.

2.11. $\vdash\vdash \cdot a \wedge b \supset b \wedge a$.

2.12. $\vdash\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge c$.

2.13. $\vdash\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c$.

2. 14. $\vdash\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b.$

2. 15. $\vdash\vdash \cdot a \wedge \cdot a \supset b \cdot \supset b.$

2. 01. 2. 01. $\vdash \cdot a \supset\subset b \cdot \overline{\overline{p}} \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset a.$

2. 2. $\vdash \cdot a \wedge b \supset a.$

Beweis. [2. 14] $\vdash \cdot a \supset \cdot b \supset a : \supset :$
[2. 12] $\vdash \cdot a \wedge b \supset \cdot b \supset a \cdot \wedge b \cdot \supset$ [2. 15] b.

2. 21. $\vdash \cdot a \supset a.$

Beweis. [2. 1, 2. 2].

2. 22. $\vdash \cdot a \wedge b \supset b.$

Beweis. [2. 11, 2. 2].

2. 23. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge d.$

Beweis. [Form. I, I, § 1, 30]. [2. 12, 2. 13].

2. 24. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset\subset \cdot a \supset b \wedge c.$

Beweis. [Form. I, I, § 1, 34 und 35]. [2. 23, 2. 1, 2. 13]. [2. 2, 2. 22].

2. 25. $\vdash \cdot b \cdot \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot a \supset b \wedge c.$

Beweis. [2. 14, 2. 12] $\vdash \cdot b \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot$
[2. 24] $a \supset b \wedge c.$

2. 26. $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset a \wedge b.$

Beweis. [2. 21, 2. 14] $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset a.$ (1)
[2. 14] $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b.$ (2)
[(1), (2), 2. 24] $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset a \cdot \wedge \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset a \wedge b.$

2. 27. $\vdash : a \supset \cdot b \supset c : \supset\subset \cdot a \wedge b \supset c.$

Beweis. [Form. I, I, § 1, 37 und 38]. [2. 12, 2. 15]. [2. 26, 2. 25, 2. 13].

2. 271. $\vdash : a \supset \cdot b \supset c : \supset\subset : b \supset \cdot a \supset c.$

Beweis. [2. 27] $\vdash : a \supset \cdot b \supset c : \supset : a \wedge b \supset c : \supset :$
[2. 11, 2. 13] $b \wedge a \supset c : \supset :$ [2. 27] $b \supset \cdot a \supset c.$

2. 28. $\vdash \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot a \wedge b \supset c.$

Beweis. [2. 2, 2. 26, 2. 13].

2. 281. $\vdash : a \supset b \cdot \supset : a \supset \cdot c \supset b.$

Beweis. [2. 28, 2. 27, 2. 13].

2. 282. $\vdash \cdot a \wedge \cdot a \wedge b \supset c \cdot \supset \cdot b \supset c.$

Beweis. [2. 27, 2. 12] $\vdash : a \wedge \cdot a \wedge b \supset c : \supset : a \wedge : a \supset \cdot b \supset c : \supset :$
[2. 15] $b \supset c.$

2.29. $\vdash : a \supset b \cdot \supset : b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c$.

Beweis. [2.13, 2.27].

2.291. $\vdash : b \supset c \cdot \supset : a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset c$.

Beweis. [2.29, 2.271].

2.3. $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot a \wedge \cdot b \wedge c$.

Beweis. [2.2, 2.28] $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset a$. (1)
[2.22, 2.12] $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset b \wedge c$. (2)
[(1), (2), 2.24] $\vdash 2.3$.

2.31. $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot b \wedge a \cdot \wedge c$.

Beweis. [Form. I, I, § 1, 14]. [2.11, 2.13].

2.32. $\vdash \cdot a \wedge \cdot b \wedge c \cdot \supset \cdot a \wedge b \cdot \wedge c$.

Beweis. [2.11] $\vdash \cdot a \wedge \cdot b \wedge c \cdot \supset \cdot b \wedge c \cdot \wedge a \cdot \supset \cdot$
[2.31] $c \wedge b \cdot \wedge a \cdot \supset \cdot$ [2.3] $c \wedge \cdot b \wedge a \cdot \supset \cdot$
[2.11] $b \wedge a \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot$ [2.31] $a \wedge b \cdot \wedge c$.

2.02. 2.02. $\vdash \cdot a \wedge b \wedge c \overline{\overline{D}} \cdot a \wedge b \cdot \wedge c$.

2.33. $\vdash a \wedge b \wedge c \supset\subset a \wedge c \wedge b \supset\subset b \wedge a \wedge c$, usw.

2.4. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \supset d$.

Beweis. [Form. I, I, § 1, 24]. [2.13. 2.12, 2.13].

§ 3. Const. v.

3.1. $\vdash \vdash a \supset a \vee b$.

3.11. $\vdash \vdash a \vee b \supset b \vee a$.

3.12. $\vdash \vdash \cdot a \supset c \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \vee b \supset c$.

3.2. $\vdash \cdot a \vee b \cdot \vee c \cdot \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c$.

Beweis. [3.1, 3.11] $\vdash \cdot c \supset \cdot b \vee c \cdot \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c$. (1)
[3.1] $\vdash \cdot a \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c$. (2)
[3.1, 3.11] $\vdash \cdot b \supset \cdot b \vee c \cdot \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c$. (3)
[(2), (3), 3.12] $\vdash \cdot a \vee b \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c$. (4)
[(1), (4), 3.12] $\vdash 3.2$.

3.21. $\vdash \cdot a \vee \cdot b \vee c \cdot \supset \cdot a \vee b \cdot \vee c$.

Beweis. [Wie für 3.2].

3.01. 3.01. $\vdash : a \vee b \vee c \overline{\overline{D}} \cdot a \vee b \cdot \vee c$.

3.22. $\vdash a \vee a \supset a$.

Beweis. [2.21, $\binom{a}{b}$ $\binom{a}{c}$ 3.12].

3. 3. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \vee c \supset b \vee d.$

Beweis. [3. 1] $\vdash b \supset b \vee d : \supset :$

[2. 291] $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset b \vee d.$ (1)

[3. 1, 3. 11, 2. 291] $\vdash \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot c \supset b \vee d \cdot$ (2)

[(1), (2), 3. 12] $\vdash \cdot 3. 3 .$

3. 31. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \vee d.$

Beweis. [2. 28, 3. 1].

3. 32. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \vee b \supset b.$

Beweis. $\left[2. 21, \binom{b}{c}\right.$ 3. 12, 2. 282].

3. 33. $\vdash \cdot a \vee b \supset b \cdot \supset \cdot a \supset b.$

Beweis. [3. 1, 2. 29].

3. 34. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \vee c \supset b \vee c.$

Beweis. $\left[\binom{c}{d}\right.$ 3. 3, 2. 282$\Big]$.

3. 35. $\vdash a \vee b \vee c \supset b \vee a \vee c \supset a \vee c \vee b,$ usw.

Beweis. [3. 11, 3. 34].

3. 4. $\vdash \cdot a \wedge c \cdot \vee \cdot b \wedge c \cdot \supset \cdot a \vee b \cdot \wedge c.$

Beweis. [Form. I, I, § 2, 20]. [3. 1, 3. 12].

3. 41. $\vdash \cdot a \vee b \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot a \wedge c \cdot \vee \cdot b \wedge c.$

Beweis. [Form. I, I, § 2, 21]. [2. 26, 2. 24, 3. 3, 2. 27].

3. 42. $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \vee c \cdot \supset \subset \cdot a \vee c \cdot \wedge \cdot b \vee c.$

Beweis. [Form. I, I, § 2, 23]. [3. 1, 2. 1, 3. 4].

[3. 41, 2. 2, 2. 22, 3. 34, 3. 22].

3. 5. $\vdash \cdot a \supset b \vee c \cdot \wedge \cdot b \supset d \cdot \wedge \cdot c \supset e \cdot \supset \cdot a \supset d \vee e.$

Beweis. [3. 34] $\vdash \cdot b \supset d \cdot \supset \cdot b \vee c \supset d \vee c.$ (1)

[3. 34, 3. 11] $\vdash \cdot c \supset e \cdot \supset \cdot d \vee c \supset d \vee e.$ (2)

[(1), (2), 2. 23, 2. 13] $\vdash \cdot 3. 5 .$

3. 51. $\vdash \cdot a \supset b \vee c \cdot \wedge \cdot b \supset d \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \supset d.$

Beweis. $\left[\binom{d}{e}\right.$ 3. 5, 3. 23, 2. 13$\Big]$.

Wir beweisen noch den in der Einleitung genannten Satz:

3. 6. $\vdash : a \vee b \supset : a \supset b \cdot \supset b.$

Beweis. [3. 32, 2. 271].

§ 4. Const. ¬.

4.1. $\vdash\vdash\cdot\neg a\supset\cdot a\supset b$.

4.11. $\vdash\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot a\supset\neg b\cdot\supset\neg a$.

4.01. 4.01. $\vdash\cdot\neg\neg a\overline{\overline{D}}\neg(\neg a)$.

4.2. $\vdash\cdot a\supset b\cdot\supset\cdot\neg b\supset\neg a$.

Beweis. $[2.14,\ 2.12]\ \vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot\neg b\cdot\supset\cdot a\supset b\cdot\wedge\cdot a\supset\neg b\cdot\supset\cdot$
$[4.11]\ \neg a:\supset:$
$[2.27]\ \vdash\cdot 4.2$.

4.21. $\vdash\cdot a\supset\neg b\cdot\supset\cdot b\supset\neg a$.

Beweis. [Wie für 4.2].

4.22. $\vdash.\ a\supset b\cdot\supset\cdot\neg\neg a\supset\neg\neg b$.

Beweis. $[4.2]\ \vdash\cdot a\supset b\cdot\supset\cdot\neg b\supset\neg a\cdot\supset\cdot\neg\neg a\supset\neg\neg b$.

Neben diesen theoretisch wichtigen Formeln werden die beiden folgenden mehrmals angewandt.

4.23. $\vdash\cdot a\wedge b\supset c\cdot\supset\cdot a\wedge\neg c\supset\neg b$.

Beweis. $[2.27]\ \vdash:a\wedge b\supset c:\supset:a\supset\cdot b\supset c:\supset:$
$[4.2,\ 2.291]\ a\supset\cdot\neg c\supset\neg b:\supset:\ [2.27]\ a\wedge\neg c\supset\neg b$.

4.24. $\vdash\cdot a\supset b\cdot\wedge\neg b\cdot\supset\cdot\neg a$.

Beweis. [2.25, 2.2, 2.22, 4.11].

4.3. $\vdash\cdot a\supset\neg\neg a$[1].

Beweis. $[2.21]\ \vdash\neg a\supset\neg a\cdot\supset\cdot\ [4.21]\ \vdash 4.3$.

4.31. $\vdash\cdot\neg a\supset\neg\neg\neg a$[2].

Beweis. $\left[\binom{\neg a}{a}4.3\right]$.

4.32. $\vdash\cdot\neg\neg\neg a\supset\neg a$[2].

Beweis. $[4.3,\ 2.14]\ \vdash\cdot\neg\neg\neg a\supset\cdot a\supset\neg\neg a\cdot\wedge\cdot a\supset\neg\neg\neg a\cdot\supset\cdot$
$[4.11]\ \neg a$.

Die folgenden Sätze führen zu dem Beweis von 4.44.

4.4. $\vdash\cdot a\wedge\neg a\supset b$.

Beweis. $\left[\binom{a}{b}\binom{a\wedge\neg a}{a}4.11,\ 2.2,\ 2.22\right]\ \vdash\neg(a\wedge\neg a)\cdot\supset\cdot$
$[4.1]\ \vdash\cdot 4.4$.

[1] Die Einsicht, daß diese von mir ursprünglich als Axiom aufgestellte Formel aus den übrigen Axiomen folgt, verdanke ich der Arbeit von V. Glivenko.

[2] Vgl. Brouwer, Jahresber. der D. M.V. 33 (1925) S. 253.

4.41. $\vdash \cdot a \wedge \neg a \cdot \vee b \cdot \supset b$.

Beweis. [4.4, 2.21, 3.12].

4.42. $\vdash \cdot a \vee b \cdot \wedge \neg a \cdot \supset b$.

Beweis. [3.41] $\vdash \cdot a \vee b \cdot \wedge \neg a \cdot \supset \cdot a \wedge \neg a \cdot \vee \cdot b \wedge \neg a \cdot \supset$.
[4.41] $b \wedge \neg a \cdot \supset \cdot$ [2.2] b.

4.43. $\vdash \cdot \neg a \supset \cdot \neg b \supset \neg (a \vee b)$.

Beweis. [4.42, 2.27] $\vdash \cdot \neg a \supset \cdot a \vee b \supset b \cdot \supset \cdot$ [4.2] $\neg b \supset \neg (a \vee b)$.

4.44. $\vdash \cdot \neg (a \vee b) \supset\subset \neg a \wedge \neg b$.

Beweis. [3.1, 4.2] $\vdash \cdot \neg (a \vee b) \supset \neg a$. (1)
[3.1, 3.11, 4.2] $\vdash \cdot \neg (a \vee b) \supset \neg b$. (2)
[(1), (2), 2.24] $\vdash \cdot \neg (a \vee b) \supset \neg a \wedge \neg b$.
[4.43, 2.27] $\vdash \cdot \neg a \wedge \neg b \supset \neg (a \vee b)$.

Die folgende Formel kann als spezieller Fall von 4.42 betrachtet werden:

4.45. $\vdash \cdot a \vee \neg a \cdot \supset \cdot \neg \neg a \supset a$.

Beweis. [4.42] $\vdash \cdot \neg a \vee a \cdot \wedge \neg \neg a \cdot \supset a : \supset :$ [2.27] $\vdash \cdot$ 4.45.

Die Formel sagt aus: »Wenn für einen bestimmten mathematischen Satz A der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt, so gilt für A auch der Satz der Reziprozität der Komplementarspezies.« Dieser Satz läßt sich nicht umkehren. Dagegen sind die Sätze, daß für jeden mathematischen Satz und jedes mathematische System der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt, und daß für jeden mathematischen Satz und jedes mathematische System der Satz von der Reziprozität der Komplementarspezies gilt, gleichwertig. (Brouwer, Jahresber. der D. M. V. 33, 1925, S. 252, Fußnote 4.) Letzteres wird formal wie folgt gezeigt.

Aus $\vdash \cdot a \vee \neg a \cdot$ erhält man nach 4.45 sofort $\vdash \cdot \neg \neg a \supset a$.
Aus $\vdash \cdot \neg \neg a \supset a \cdot$ erhält man zunächst durch Einsetzen
$\vdash \neg \neg (a \vee \neg a) \supset a \vee \neg a \cdot$, und dann nach 4.8 $\vdash a \vee \neg a$.

Aus 4.42 folgen zwei in der Einleitung genannte Sätze:

4.46. $\vdash \cdot \neg a \vee b \cdot \supset \cdot a \supset b$.

Beweis. [4.3, 2.12] $\vdash \cdot \neg a \vee b \cdot \wedge a \cdot \supset \cdot \neg a \vee b \cdot \wedge \neg \neg a \cdot \supset \cdot$ [4.42]
$b : \supset :$
[2.27] $\vdash \cdot$ 4.46.

4.47. $\vdash \cdot a \vee b \supset \cdot \neg a \supset b$.

Beweis. [4.42, 2.27].

Jetzt geben wir die Formeln, welche zu dem Beweis derjenigen Formeln führen, die aus 4.44 durch Verwechslung von $\vee$ und $\wedge$ entstehen (4.53,

4. 54); allerdings muß in 4. 54 die beschränkende Bedingung $a \vee \neg a$ hinzugefügt werden, welche hier nicht durch $\neg\neg a \supset a$ ersetzbar ist. Bemerkenswert ist, daß 4. 52 ohne eine solche Bedingung gilt.

4. 5. $\vdash \cdot b \wedge a \supset \neg a \cdot \supset \cdot b \supset \neg a$.

Beweis. [2. 22, 2. 24] $\vdash : b \wedge a \supset \neg a : \supset : b \wedge a \supset a \wedge \neg a : \supset :$
[2. 27] $b \supset \cdot a \supset a \wedge \neg a : \supset :$
[2. 2, 2. 22, 4. 11, 2. 291] $b \supset \neg a$.

4. 51. $\vdash \cdot a \wedge \neg (a \wedge b) \supset \neg b$.

Beweis. [2. 26] $\vdash \cdot a \supset \cdot b \supset a \wedge b \cdot \supset \cdot$ [4. 2] $\neg (a \wedge b) \supset \neg b : \supset :$
[2. 27] $\vdash \cdot 4. 51$.

Der Satz kann verschärft werden zu

4. 511. $\vdash \cdot \neg\neg a \wedge \neg (a \wedge b) \supset \neg b$.

Beweis. [4. 51, 2. 27] $\vdash \cdot \neg (a \wedge b) \supset \cdot b \supset \neg a \cdot \supset \cdot$
[4. 2] $\neg\neg a \supset \neg b : \supset :$
[2. 27] $\vdash \cdot 4. 511$.

4. 52. $\vdash \cdot \neg (a \wedge b) \supset \cdot a \supset \neg b$.

Beweis. [4. 51, 2. 27].

4. 521. $\vdash \cdot a \supset \neg b \cdot \supset \neg (a \wedge b)$.

Beweis. [2. 12] $\vdash \cdot a \supset \neg b \cdot \supset \cdot a \wedge b \supset \neg b \wedge b \cdot \supset \cdot$
[4. 11] $\neg (a \wedge b)$.

4. 53. $\vdash \cdot \neg a \vee \neg b \supset \neg (a \wedge b)$.

Beweis. [2. 2, 4. 2] $\vdash \cdot \neg a \supset \neg (a \wedge b)$. (1)
[2. 22, 4. 2] $\vdash \cdot \neg b \supset \neg (a \wedge b)$. (2)
[(1), (2), 3. 12] $\vdash \cdot 4. 53$.

4. 54. $\vdash \cdot \neg (a \wedge b) \wedge \cdot a \vee \neg a \cdot \supset \neg a \vee \neg b$.

Beweis. [4. 51] $\vdash \cdot a \wedge \neg (a \wedge b) \supset \neg b$. (1)
[2. 2] $\vdash \cdot \neg a \wedge \neg (a \wedge b) \supset \neg a$. (2)
[3. 41, (1), (2), 3. 3] $\vdash \cdot 4. 54$.

Sätze über die doppelte Negation.

4. 6. $\vdash \cdot \neg\neg a \wedge \neg\neg b \supset \neg\neg (a \wedge b)$.

Beweis. [4. 52] $\vdash \cdot \neg (a \wedge b) \supset \cdot a \supset \neg b \cdot \supset \cdot$ [4. 2] $\neg\neg b \supset \neg a : \supset :$
[2. 27] $\vdash \cdot \neg (a \wedge b) \wedge \neg\neg b \supset \neg a : \supset :$ [4. 23] $\vdash \cdot 4. 6$.

4. 61. $\vdash \cdot \neg\neg (a \wedge b) \supset \neg\neg a \wedge \neg\neg b$.

Beweis. [2. 2, 2. 22, 4. 22, 2. 24].

4.62. $\vdash \cdot \neg\neg a \vee \neg\neg b \supset \neg\neg (a \vee b)$.

Beweis. [3.1, 3.11, 4.22, 3.12].

4.63. $\vdash \cdot \neg\neg (a \vee b) \wedge \cdot \neg a \vee \neg\neg a \cdot \supset \neg\neg a \vee \neg\neg b$.

Beweis. [4.44, 4.2] $\vdash \cdot \neg\neg (a \vee b) \supset \neg (\neg a \wedge \neg b)$. (1)

[4.54] $\vdash \cdot \neg (\neg a \wedge \neg b) \wedge \cdot \neg a \vee \neg\neg a \cdot \supset \neg\neg a \vee \neg\neg b$. (2)

[(1), (2), 2.12, 2.13] $\vdash \cdot 4.63$.

Die Bedingung $\neg a \vee \neg\neg a$ kann natürlich durch $a \vee \neg a$, aber nicht durch $\neg\neg a \supset a$ ersetzt werden.

4.7. $\vdash \cdot a \supset \neg (b \wedge c) \cdot \supset \cdot a \wedge b \supset \neg c$.

Beweis. [4.52, 2.291, 2.27].

4.71. $\vdash \cdot a \supset b \vee \neg c \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b$.

Beweis. [2.12] $\vdash : a \supset b \vee \neg c : \supset : a \wedge c \supset \cdot b \vee \neg c \cdot \wedge c : \supset :$

[3.41] $b \wedge c \cdot \vee \cdot \neg c \wedge c : \supset :$ [4.41] $b \wedge c : \supset :$ [2.2] b.

Zum »Satz vom ausgeschlossenen Dritten«.

4.8. $\vdash \cdot \neg\neg (a \vee \neg a)$.[1]

Beweis. [3.1] $\vdash a \supset a \vee \neg a \cdot \supset \cdot$ [4.2] $\vdash \neg (a \vee \neg a) \supset \neg a$. (1)

[3.1, 3.11] $\vdash \neg a \supset a \vee \neg a \cdot \supset \cdot$

[4.2] $\vdash \neg (a \vee \neg a) \supset \neg\neg a$. (2)

[(1), (2), 4.11] $\vdash \cdot 4.8$.

4.81. $\vdash \neg\neg (\neg\neg a \supset a)$.

Beweis. [4.45, 4.8, 4.22].

4.82. $\vdash \cdot a \vee \neg a \supset b \cdot \supset \cdot \neg\neg b$.

Beweis. [4.22] $\vdash \cdot a \vee \neg a \supset b \cdot \supset \cdot \neg\neg (a \vee \neg a) \supset \neg\neg b \cdot \supset \cdot$

[4.8, 2.15] $\neg\neg b$.

4.83. $\vdash \cdot a \vee \neg a \supset \neg b \cdot \supset \neg b$.[1]

Beweis. [4.82, 4.32].

Diese Formel sagt aus, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten zum Beweis eines negativen Satzes immer gebraucht werden darf.

Wir beweisen noch einige in der Einleitung genannte Sätze.

4.9. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \neg (a \wedge \neg b)$.

Beweis. [4.3, 2.291] $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset \neg\neg b \cdot \supset \cdot$

[4.521] $\neg (a \wedge \neg b)$.

[1] 4.8 enthält den von Brouwer herrührenden »Satz von der Absurdität der Absurdität des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten«. Der Beweis von 4.8 und der Satz 4.83 sind der schon zitierten Arbeit von V. Glivenko entnommen.

4.91. $\vdash \cdot a \vee b \supset \neg (\neg a \wedge \neg b)$.

Beweis. [4.47, 4.9].

4.92. $\vdash \cdot a \wedge b \supset \neg (\neg a \vee \neg b)$.

Beweis. [4.53, 4.21].

Anhang.

Die Unabhängigkeit der Axiome. Die Unbeweisbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten.

Im vorstehenden sind als Axiome angenommen:

2.1. $\vdash \vdash a \supset a \wedge a$.

2.11. $\vdash \vdash a \wedge b \supset b \wedge a$.

2.12. $\vdash \vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge c$.

2.13. $\vdash \vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c$.

2.14. $\vdash \vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b$.

2.15. $\vdash \vdash \cdot a \wedge \cdot a \supset b \cdot \supset b$.

3.1. $\vdash \vdash a \supset a \vee b$.

3.11. $\vdash \vdash a \vee b \supset b \vee a$.

3.12. $\vdash \vdash \cdot a \supset c \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \vee b \supset c$.

4.1. $\vdash \vdash \cdot \neg a \supset \cdot a \supset b$.

4.11. $\vdash \vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot a \supset \neg b \cdot \supset \neg a$.

Wir beweisen die Unabhängigkeit dieser Axiome in der von Bernays (a. a. O. S. 316) angegebenen Weise. $\supset$, $\wedge$, $\vee$ werden als Arten der Komposition in einer Gruppe aufgefaßt, $\neg$ als Funktion in der Gruppe. Hierdurch erhält jede Formel, wenn für die Variabeln Elemente der Gruppe eingesetzt werden, einen bestimmten Wert. Die Formel »gilt«, wenn dieser Wert immer 0 ist. Die Gruppen sind so gebildet, daß in jeder von ihnen ein Axiom nicht, die andern aber sämtlich gelten. Weiter ist dafür gesorgt, daß aus geltenden Formeln durch die Operationsregeln von § 1 immer wieder geltende Formeln folgen. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

I. $0 \wedge 0 = 0$.

II. $0 \supset a$ hat nur dann den Wert 0, wenn $a = 0$.

In den Kompositionstabellen steht das erste Element oben, das zweite links.

Gruppe I.

Elemente: 0, 1, 2.

$\supset$	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	2
2	2	0	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\neg$	0	1	2
	1	0	1

2.1 gilt nicht, denn $2 \supset 2 \wedge 2 = 2 \supset 1 = 2$.

Gruppe II.

Elemente: Alle positiven ganzen Zahlen und 0.

$a \supset b = 1$, wenn $a = 0$ und $b \neq 0$; $a \supset b = 0$ sonst.
$a \wedge 2 = 0$; $a \wedge b = a + b$, wenn $b \neq 2$.
$a \vee b = 0$, wenn $a = 0$ oder $b = 0$; $a \vee b = 1$ sonst.
$\neg 0 = 1$; $\neg a = 0$, wenn $a \neq 0$.

2.11 gilt nicht, denn $3 \wedge 2 \supset 2 \wedge 3 = 0 \supset 5 = 1$.

Gruppe III.

Elemente: Alle positiven und negativen ganzen Zahlen und 0.

$a \supset b = 1$, wenn $a = 0$ und $b \neq 0$; $a \supset b = 0$ sonst.
$a \wedge b = a + b$.
$a \vee b = 0$, wenn $a = 0$ oder $b = 0$; $a \vee b = 1$ sonst.
$\neg 0 = 1$; $\neg a = 0$, wenn $a \neq 0$.

2.12 gilt nicht, denn $1 \supset 2 \cdot \supset \cdot 1 \wedge -1 \supset 2 \wedge -1 = 0 \supset \cdot 0 \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$.
(Man beachte den Unterschied zwischen -1 und $\neg 1$!)

Gruppe IV.

Elemente: Alle positiven ganzen Zahlen, 0 und die Kardinalzahl α der abzählbar unendlichen Spezies.

$a \supset b = b - a$, wenn $b > 2a$; $a \supset b = 0$ sonst.
$a \wedge b = a + b$.
$a \vee b = 2a$, wenn $a \leqq b$; $a \vee b = 2b$ sonst.
$\neg \alpha = 0$; $\neg a = \alpha$, wenn a endlich ist.

2.13 gilt nicht, denn $1 \supset 2 \cdot \wedge \cdot 2 \supset 4 \cdot \supset \cdot 1 \supset 4 = 0 \wedge 0 \supset 3 = 0 \supset 3 = 3$.

Gruppe V[1].

Elemente: 0, 1, 2.

$\supset$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	1	0	1

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	0

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	0

$\neg$	0	1	2
	1	0	1

2.14 gilt nicht, denn $2 \supset \cdot 0 \supset 2 = 2 \supset 1 = 1$.

[1] Die Tabellen für $\supset$ und $\wedge$ dieser Gruppe sind aus denen für $\vee$ und $\neg$ in Gruppe V bei Bernays gebildet durch Anwendung der Formeln

$$a \supset b = \neg a \vee b; \quad a \wedge b = \neg (\neg a \vee \neg b).$$

Gruppe VI.

Elemente: 0, 1, 2, 3.

⊃	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
2	2	0	0	0
3	2	0	2	0

∧	0	1	2	3
0	0	1	2	2
1	1	1	1	1
2	2	1	2	2
3	2	1	2	2

∨	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	2
3	0	3	2	3

¬	0	1	2	3
	1	0	1	1

2. 15 gilt nicht, denn $0 \wedge \cdot 0 \supset 3 \cdot \supset 3 = 0 \wedge 2 \supset 3 = 2 \supset 3 = 2$.

Gruppe VII.

Elemente: 0, 1.

⊃	0	1
0	0	0
1	1	0

∧	0	1
0	0	1
1	1	1

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

¬	0	1
	1	0

3. 1 gilt nicht, denn $0 \supset 0 \vee 1 = 0 \supset 1 = 1$.

(Die Tabellen für ⊃ und ∧ sind diejenigen, welche man erhält, wenn 0 einen beliebigen richtigen und 1 einen beliebigen falschen Satz darstellt. Wir wollen solche Tabellen »normal« nennen.)

Gruppe VIII.

Elemente: 0, 1, 2.

⊃	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	0	0

∧	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

∨	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	2	2

¬	0	1	2
	1	0	0

3. 11 gilt nicht, denn $0 \vee 2 \supset 2 \vee 0 = 0 \supset 2 = 2$[1].

Gruppe IX.

Elemente: 0, 1.

Für ⊃ und ∧ die normalen Tabellen. (S. Gruppe VII.)

$a \vee b = 0$ immer. $\neg 0 = 1$. $\neg 1 = 0$.

3. 12 gilt nicht: $1 \supset 1 \cdot \wedge \cdot 1 \supset 1 \cdot \supset \cdot 1 \vee 1 \supset 1 = 0 \wedge 0 \supset \cdot 0 \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$.

Gruppe X.

Elemente: 0, 1.

Für ⊃, ∧ und ∨ die normalen Tabellen. $\neg 0 = \neg 1 = 0$.

4. 1 gilt nicht, denn $\neg 0 \supset \cdot 0 \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$.

[1] Die Tabellen für ∨ und ¬ in Gruppe VIII sind identisch mit denen in Gruppe VI von Bernays; diejenigen für ⊃ und ∧ sind gebildet, wie in der vorigen Fußnote angegeben.

Gruppe XI.

Elemente: o, 1.

Für $\supset$, $\wedge$ und $\vee$ die normalen Tabellen. $\neg o = \neg 1 = 1$.

4. 11 gilt nicht, denn $1 \supset 1 \cdot \wedge \cdot 1 \supset \neg 1 \cdot \supset \neg 1 = o \wedge o \supset 1 = o \supset 1 = 1$.

Gruppe XII.

Elemente: o, 1, 2.

$\supset$	o	1	2
o	o	o	o
1	1	o	1
2	2	o	o

$\wedge$	o	1	2
o	o	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\vee$	o	1	2
o	o	o	o
1	o	1	2
2	o	2	2

$\neg$	o	1	2
	1	o	1

Hier gelten alle Axiome; der Satz $\neg\neg a \supset a$ nicht, denn $\neg\neg 2 \supset 2 = \neg 1 \supset 2 = o \supset 2 = 2$.

Nach 4. 45 erhalten wir den *Satz*: Die Formel, welche den Satz vom ausgeschlossenen Dritten darstellt, kann aus den Axiomen nicht abgeleitet werden.

Gruppe XII kann wie folgt interpretiert werden: o bedeute einen beliebigen richtigen Satz, 1 einen beliebigen falschen Satz, 2 einen Satz, der nicht falsch sein kann, dessen Richtigkeit aber nicht bewiesen ist. Man erhält dann eben die obigen Tabellen.

Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.

Von Dr. A. Heyting
in Enschede (Niederlande).

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 19. Dezember 1929 [s. Jahrg. 1929 S. 686].)

II.

Einleitung.

Die erste Abhandlung dieser Reihe ist unter dem Titel »Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik« in diesen Sitzungsberichten erschienen[1]; sie enthält den intuitionistischen Aussagenkalkül, also nur diejenigen Formeln, welche auf die gegenseitigen Beziehungen der Aussagen Bezug haben, aber diese selbst nicht zergliedern. Um auch die Zerlegung in Subjekt und Prädikat zu ermöglichen, folgen wir dem Weg des Funktionenkalküls, der zuerst von Russell und Whitehead angegeben und neulich von Hilbert und Ackermann in ihrem Buch[2] übersichtlich dargestellt und wesentlich verbessert worden ist. Es muß also vor allem der Begriff des mathematischen Gegenstandes erläutert werden. Der wirkliche Aufbau der Mathematik fängt sofort mit der Betrachtung von Gegenständen (natürliche Zahlen, Mengen) an. Für die formale Behandlung erweist es sich aber als bequemer, allgemeine Sätze über Beziehungen zwischen Gegenständen und über Formeln, welche Gegenstandsveränderliche enthalten, vorauszuschicken. Hierfür lassen sich die gleichen Gründe anführen wie für das Aufstellen eines allgemeinen Aussagenkalküls, der den eigentliche mathematische Sätze darstellenden Formeln vorangeht. (I, Einleitung, S. 42.)

Die grundlegende Beziehung zwischen Individuen ist $p \equiv q$, »p ist derselbe Gegenstand wie q«. Zur Erläuterung gehen wir etwas näher auf die später einzuführenden Gleichheitsbeziehungen ein. Das Zeichen $=$ wird gebraucht für Zahlengleichheit und ähnliche Begriffe (z. B. Gleichheit von Kardinalzahlen von Mengen); diese Beziehung kann bestehen zwischen Gegenständen, die nicht identisch sind; man denke an Darstellungen derselben Zahl in verschiedenen Zahlensystemen. Wir brauchen also ein besonderes Zeichen für die mathematische Identität, welche für jede Art von Gegenständen de-

[1] Sie wird im folgenden als »I« zitiert; die in ihr enthaltenen Formeln einfach durch die Nummer, da diese Numerierung hier fortgesetzt wird. Jede Formelnummer, welche vor dem »Dezimalzeichen« eine kleinere Zahl als 5 enthält, verweist also auf die frühere Abhandlung.

[2] Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928. Im folgenden zitiert als H.-A.

finiert werden muß, und zwar so, daß sie Übereinstimmung in allen mathematisch wichtigen Eigenschaften fordert; solche Definitionen hat Brouwer für viele Arten von Gegenständen gegeben, z. B. Math. Ann. 93 S. 245 für Mengenelemente und Mengen. Für die mathematische Identität wählen wir das Zeichen ≡. Aus den angeführten Definitionen von Brouwer geht schon hervor, daß zwei identische Mengenelemente nicht derselbe Gegenstand zu sein brauchen: sie können verschiedenen Mengen angehören und aus verschiedenen Wahlfolgen hervorgegangen sein. Für die Beziehung »Ist derselbe Gegenstand wie« muß also ein besonderes Zeichen ≣ eingeführt werden.

Die Formel $p \equiv p$ gilt nicht für jedes Zeichen p; sie wird vielmehr gebraucht, um p als Zeichen für einen Gegenstand zu kennzeichnen. Man kann also

$$6.\ 1.\ \vdash \vdash 1 \equiv 1$$

übersetzen durch »1 ist ein Gegenstand«. Wir schaffen uns so die Möglichkeit, die Gegenstände ebenso nacheinander einzuführen, wie das beim Aufbau der Mathematik geschieht.

Der Grundgedanke des Funktionenkalküls, wie dieser von Hilbert und Ackermann gefaßt worden ist, konnte hier übernommen werden; neben den schon durch die Abweichungen im Aussagenkalkül bedingten Unterschieden ist zu bemerken, daß weder (Ex) durch (x) noch (x) durch (Ex) definiert werden kann. (Ex)a bedeutet: »Es kann ein Gegenstand x angegeben werden, für welchen der Satz a gilt.« Wir haben den Kalkül auch formal etwas geändert, mit Rücksicht auf die spätere Anwendung. Erstens heben wir den Unterschied zwischen Aussagen- und Funktionsvariabeln auf, weil eine konstante Aussage immer als konstante Funktion betrachtet werden kann. Zweitens führen wir die Bezeichnung $\binom{p}{x}a$ ein für »der Ausdruck, der aus a entsteht, indem man die Veränderliche x überall, wo sie auftritt, durch die Zeichenzusammenstellung p ersetzt«. Eine Axiomatik dieses Ersetzungsbegriffs wäre keineswegs einfach; sie müßte auch die mehrfachen Substitutionen wie $\binom{p, q}{x, y}a$, wo zugleich x durch p und y durch q ersetzt wird, behandeln; diese lassen sich im allgemeinen Fall, wo p und q auch x und y enthalten können, nicht auf einfache Substitutionen zurückführen. Hier beschränke ich mich auf diejenigen Sätze, welche ich für das Folgende brauche.

Der Funktionenkalkül ist in § 5 und 6 enthalten. § 5 enthält die Regeln, welche nicht formalistisch geschrieben werden konnten; er stimmt z. T. wörtlich mit H.-A. S. 51—54 überein.

In § 7 führe ich einige Zeichen, welche Beziehungen zwischen Gegenständen ausdrücken, ein.

In § 10 leite ich die Theorie der natürlichen Zahlen aus den Peanoschen Axiomen ab.

In einer folgenden Arbeit hoffe ich die unbeschränkt fortgesetzten Wahlfolgen und die Mengen zu behandeln.

Neben den logischen Zeichen kommen in dieser Arbeit die folgenden Zeichen für Grundbegriffe vor:

Die Veränderliche bindenden Zeichen $\binom{p}{x}$, (x), (Ex).

Die Beziehungen zwischen Gegenständen $\equiv$, ε und das Funktionszeichen '.

Die Gegenstände 1, N, seq.

§ 5. Operationsregeln (Fortsetzung von § 1).

5. 1. Die Veränderlichen werden unterschieden in Aussagenveränderliche und Gegenstandsveränderliche. Erstere werden durch die Anfangsbuchstaben des Alphabets, letztere durch p, q, r $\cdots$ bezeichnet.

5. 2. Die Verbindungen $\binom{p}{x}$, (x), (Ex), wo x eine Gegenstandsveränderliche ist, machen x in dem Teil der Formel, auf welchen sie Bezug haben, zu einer *gebundenen Veränderlichen*. Eine solche darf nur durch eine andere Gegenstandsveränderliche ersetzt werden.

Definition von »Ausdruck« (H.-A. S. 52).

5. 3. Jede richtige Formel ist ein Ausdruck.

5. 31. Aus einem Ausdruck entsteht wieder ein Ausdruck, indem man einen darin auftretenden Gegenstand an einer Stelle durch einen anderen Gegenstand ersetzt.

5. 32. Aus einem Ausdruck entsteht wieder ein Ausdruck, wenn man eine Aussagenvariabele überall durch denselben Ausdruck, oder eine Gegenstandsvariabele überall durch dieselbe Zeichenzusammenstellung p, für welche $p \equiv p$ eine richtige Formel ist, ersetzt.

5. 33. Aus einem Ausdruck entsteht wieder ein Ausdruck, wenn man eine Veränderliche überall durch eine andere Veränderliche derselben Art ersetzt.

5. 34. Ist A ein Ausdruck, so ist $\neg$ A ein Ausdruck, und umgekehrt.

5. 35. Ist A ein Ausdruck, in welchem x nicht als gebundene Veränderliche auftritt, so sind $\binom{p}{x}$ A, (x) A, (Ex) A Ausdrücke.

5. 36. Sind A und B Ausdrücke, so sind auch $A \supset B$, $A \wedge B$, $A \vee B$ Ausdrücke.

5. 37. In einem Ausdruck dürfen die Wirkungsbereiche zweier bindenden Zeichenzusammenstellungen, wie in 5. 2 genannt, welche dieselbe Veränderliche enthalten, nicht übereinandergreifen.

Bemerkung. Es können später noch weitere Veränderliche bindende Zeichen definiert werden als die in 5. 2 angegebenen.

5. 4. Aus einer richtigen Formel entsteht wieder eine richtige Formel, wenn man eine Aussagenvariabele durch einen beliebigen Ausdruck oder eine Gegenstandsvariabele durch eine Zeichenzusammenstellung p, für welche $p \equiv p$ eine richtige Formel ist, ersetzt.

5. 5. Sind $a \supset b$ und $(p) \cdot \binom{p}{x}\, a \supset C\, a$ richtige Formeln, so ist $a \supset (x)\, b$ eine richtige Formel.

5. 6. Sind $a \supset b$ und $(p) \cdot \binom{p}{x}\, b \supset C\, b$ richtige Formeln, so ist $(Ex)\, a \supset b$ eine richtige Formel.

5. 7. Wenn in dem Ausdruck A die Veränderliche x nur gebunden auftritt, so ist $(y) \cdot \binom{y}{x}\, A \supset C\, A$ eine richtige Formel. (Nach 5. 2 kann y hier nur eine Gegenstandsveränderliche, keine Konstante vorstellen.)

Bemerkung. 5. 5 und 5. 6 enthalten Regel γ von H.-A. (S. 54). Aus ihnen folgt Regel γ', wenn man über einen konstanten Satz, z. B. $\vdash 1 \equiv 1$ verfügt, wie folgt:

5. 8. Ist A eine richtige Formel, die x nicht als gebundene Veränderliche enthält, so ist (x) A eine richtige Formel.

Beweis. $\vdash A \cdot \supset \cdot$ [2. 14] $\vdash 1 \equiv 1 \supset A \cdot \supset \cdot$ [5. 5] $\vdash 1 \equiv 1 \supset (x)\, A \cdot \supset \cdot$ [1. 3] $\vdash (x)\, A$.

Zu der Einteilung einer Formel durch Punkte und Klammern ist folgendes zu bemerken:

Klammern binden stärker als Punkte.

Jede Formel wird zuerst bei der größten Punktegruppe gespalten; wenn es zwei gleich große Gruppen gibt, spalte man zuerst bei dem Zeichen, das in der folgenden Liste am höchsten steht.

Ia. $\supset, \supset C, \overset{=}{D}$.
Ib. $\wedge, \vee$.
II. $\varepsilon, \equiv$.
IIIa. $\Gamma, \underline{\iota}$.
IIIb. $', ''$.
IVa. $=, <, >$.
IVb. $+, -$.

Ein Behauptungszeichen $\vdash$ reicht so weit, bis eine größere Zahl von Punkten auftritt als die, von der es begleitet wird. Ein Klammerzeichen (x), (Ex) oder $\binom{y}{x}$ reicht, bis das logische Zeichen (Gruppe Ia, b) mit der gleichen Punktezahl oder bis eine größere Punktezahl auftritt.

§ 6. Const. 1, $\equiv$, (E), ( ) (*Grundbegriffe*), $(\bar{\ })$ (*Abkürzung*).

6. 1. $\vdash \vdash 1 \equiv 1$.

6. 11. $\vdash \vdash p \equiv p \wedge q \equiv q \supset p \equiv q \vee \neg (p \equiv q)$.

6. 12. $\vdash \vdash q \equiv p \supset p \equiv q$.

Axiome über $\binom{p}{x}$.

6. 2. $\vdash\vdash \binom{x}{x} a \supset\subset a$.

6. 21. $\vdash\vdash \left(\binom{q}{x} p\right)_x a \supset\subset \binom{q}{x}\binom{p}{x} a$.

6. 22. $\vdash\vdash \cdot \binom{p}{x} \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot \binom{p}{x} a \supset \binom{p}{x} b$.

6. 221. $\vdash\vdash \cdot \binom{p}{x} a \supset \binom{p}{x} b \cdot \supset \cdot \binom{p}{x} \cdot a \supset b$.

6. 23. $\vdash\vdash \cdot \binom{p}{x} a \wedge \binom{p}{x} b \supset \cdot \binom{p}{x} \cdot a \wedge b$. [Vgl. 6. 412].

6. 24. $\vdash\vdash \cdot \binom{p}{x} \cdot a \vee b \cdot \supset \binom{p}{x} a \vee \binom{p}{x} b$. [Vgl. 6. 421].

6. 25. $\vdash\vdash \neg \binom{p}{x} a \supset \binom{p}{x} \neg a$. [Vgl. 6. 431].

6. 26. $\vdash\vdash \cdot p \equiv q \supset \cdot \binom{p}{x} a \supset \binom{q}{x} a$:

Axiome über (x).

6. 3. $\vdash\vdash (x) a \supset \binom{p}{x} a$.

6. 31. $\vdash\vdash (x) a \supset (y) \binom{y}{x} a$.

6. 32. $\vdash\vdash \cdot (y) \cdot y \equiv y \supset \binom{y}{x} a \cdot \supset (x) a$.

6. 01. 6. 01. $\vdash \cdot g (\overline{x}) \overline{\overline{\text{D}}} \cdot (p) \binom{p}{x} g \equiv g \cdot \vee \cdot (p) \cdot \binom{p}{x} g \supset\subset g$.

Bemerkung. $g (\overline{x})$ bedeutet: »g enthält x nicht«. Aus 6. 01 geht hervor, daß x in $g (\overline{x})$ eine gebundene Veränderliche ist. Die erste Alternative in 6. 01 gilt, wenn g einen Gegenstand darstellt; die zweite, wenn g ein Ausdruck ist. Die Einführung dieses Zeichens soll es ermöglichen, den Unterschied zwischen Funktionen- und Aussagenveränderlichen zu entbehren.

6. 4. $\vdash \cdot (x) \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot (x) a \supset (x) b$.

Beweis. [H-A, S. 58]. [6. 3] $\vdash \cdot (x) \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset b : \supset :$.

[2. 27] $\vdash : a \supset : (x) \cdot a \supset b \cdot \supset b : \cdot \supset :$

[6. 3, 2. 27] $\vdash \cdot (x) a \wedge \cdot (x) \cdot a \supset b \cdot \supset b : \supset :$

[5. 5] $\vdash \cdot (x) a \wedge \cdot (x) \cdot a \supset b \cdot \supset (x) b : \supset$

[2. 27] $\vdash \cdot$ 6. 4.

6. 401. $\vdash \cdot (x) \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot \binom{p}{x} a \supset \binom{p}{x} b$.

Beweis. [6. 3, 6. 22].

6.402. $\vdash (x)\, a \supset a$.

Beweis. $\left[\binom{x}{p}\, 6.3,\ 6.2\right]$.

6.41. $\vdash \cdot (x) \cdot a \wedge b \cdot \supset (x)\, a \wedge (x)\, b$.

Beweis. $[2.2,\ 5.7] \quad \vdash \cdot (x) \cdot a \wedge b \supset a : \supset :$

$[6.4] \quad \cdot \vdash \cdot (x) \cdot a \wedge b \cdot \supset (x)\, a$. (1)

$[2.22,\ 5.7,\ 6.4] \vdash : (x) \cdot a \wedge b \cdot \supset (x)\, b$. (2)

$[(1),\ (2),\ 2.24] \quad \vdash \cdot 6.41$.

6.411. $\vdash \cdot (x)\, a \wedge (x)\, b \supset \cdot (x) \cdot a \wedge b$.

Beweis. [H—A, S. 57]. $[6.3,\ 2.23] \vdash \cdot (x)\, a \wedge (x)\, b \supset a \wedge b \cdot \supset \cdot$

$[5.5] \vdash \cdot 6.411$.

6.412. $\vdash \cdot \binom{p}{x} \cdot a \wedge b \cdot \supset \binom{p}{x} a \wedge \binom{p}{x} b$.

Beweis. $[2.2,\ 2.22,\ 5.7,\ 6.401,\ 2.24]$.

6.413. $\vdash \cdot a\,(\bar{x}) \wedge b\,(\bar{x}) \supset \cdot a \supset b \cdot (\bar{x})$.

Beweis. $\vdash : (p) \cdot a \supset \binom{p}{x} a \cdot \wedge \cdot (p) \cdot \binom{p}{x} b \supset b : \supset :$ [6.411]

$(p) : a \supset \binom{p}{x} a \cdot \wedge \cdot \binom{p}{x} b \supset b : \supset :$ [6.22]

$(p) : \binom{p}{x} \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot \binom{p}{x} a \supset \binom{p}{x} b \cdot \supset \cdot a \supset b$. (1)

$\vdash : (p) \cdot \binom{p}{x} a \supset a \cdot \wedge \cdot (p) \cdot b \supset \binom{p}{x} b : \supset :$ [ebenso]

$(p) : a \supset b \cdot \supset \cdot \binom{p}{x} \cdot a \supset b$. (2)

$[(1),\ (2)] \vdash \cdot 6.413$.

6.414. $\vdash \cdot a\,(\bar{x}) \wedge b\,(\bar{x}) \supset \cdot a \wedge b \cdot (\bar{x})$.

Beweis. [Wie für 6.413].

6.42. $\vdash \cdot (x)\, a \vee (x)\, b \supset \cdot (x) \cdot a \vee b$.

Beweis. $[3.1,\ 6.4] \quad \vdash \cdot (x)\, a \supset \cdot (x) \cdot a \vee b$. (1)

$[3.1,\ 3.11,\ 6.4] \vdash \cdot (x)\, b \supset \cdot (x) \cdot a \vee b$. (2)

$[(1),\ (2),\ 3.12] \quad \vdash \cdot 6.42$.

6.421. $\vdash \cdot \binom{p}{x} a \vee \binom{p}{x} b \supset \cdot \binom{p}{x} \cdot a \vee b$.

Beweis. $[3.1,\ 3.11,\ 6.401,\ 3.12]$.

6.422. $\vdash \cdot a(\bar{x}) \wedge b(\bar{x}) \supset \cdot a \vee b \cdot (\bar{x})$.

Beweis. $|3.3, 6.421| \vdash : (p) \cdot a \supset \binom{p}{x} a \cdot \wedge \cdot (p) \cdot b \supset \binom{p}{x} b \cdot \supset :$

$(p) : a \vee b \cdot \supset \cdot \binom{p}{x} \cdot a \vee b.$ (1)

$|3.3, 6.24| \vdash : (p) \cdot \binom{p}{x} a \supset a \cdot \wedge \cdot (p) \cdot \binom{p}{x} b \supset b \cdot \supset :$

$(p) : \binom{p}{x} \cdot a \vee b \cdot \supset \cdot a \vee b.$ (2)

$|(1), (2)| \vdash \cdot 6.422.$

6.43. $\vdash \cdot (x) \neg a \supset \neg (x) a.$

Beweis. $|6.411| \quad \vdash \cdot (x) \neg a \wedge (x) a \supset \cdot (x) \cdot a \wedge \neg a \cdot \supset \cdot$

$|4.4| \quad (x) \neg (1 \equiv 1) \cdot \supset \cdot \neg (1 \equiv 1) : \supset :$

$|6.1, 4.24| \vdash \neg ((x) \neg a \wedge (x) a) : \supset :$

$|4.52| \quad \vdash \cdot 6.43.$

6.431. $\vdash \cdot \binom{p}{x} \neg a \supset \neg \binom{p}{x} a.$

Beweis. [Wie für 6.43].

6.432. $\vdash \cdot a(\bar{x}) \supset \cdot \neg a \cdot (\bar{x}).$

Beweis. $[6.01, 4.2, 6.431]$.

6.44. $\vdash \cdot p(\bar{x}) \supset \cdot \binom{p}{x} a \cdot (\bar{x}).$

Beweis. $[6.01] \vdash \cdot p(\bar{x}) \cdot \supset \cdot (q) \binom{q}{x} p \equiv p \cdot \supset \cdot$

$|6.26| \quad (q) \cdot \binom{\binom{q}{x} p}{x} a \supset \subset \binom{p}{x} a \cdot \supset \cdot$

$|6.21| \quad (q) \cdot \binom{q}{x} \binom{p}{x} a \supset \subset \binom{p}{x} a \cdot \supset \cdot \quad |6.01| \quad \binom{p}{x} a \cdot (\bar{x}).$

6.441. $\vdash \binom{q}{x} \binom{p}{x} a \wedge p(\bar{x}) \supset \binom{p}{x} a.$

Beweis. $[6.44. 6.33]$.

6.45. $\vdash (x)\, x \equiv x.$

Beweis. $\left[\binom{x \equiv x}{a} 6.32\right]$.

6.451. $\vdash p \equiv q \supset q \equiv q.$

Das heißt: Die Beziehung $p \equiv q$ kann nur zwischen zwei Gegenständen bestehen.

Beweis. $\left[\binom{x \equiv q}{a} 6.26, 2.27, 2.1\right]$.

9. 452. $\vdash p \equiv q \wedge q \equiv r \supset p \equiv r$.

Beweis. $\left[\binom{x \equiv r}{a}\ 6.\ 26,\ 2.\ 27\right]$.

Axiome über (Ex).

6. 5. $\vdash \vdash \binom{p}{x} a \supset (Ex)\, a$.

6. 51. $\vdash \vdash \cdot a\,(\bar{x}) \supset \cdot (Ex)\, a \supset (x)\, a$.

6. 52. $\vdash \vdash \cdot (x) \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot (Ex)\, a \supset (Ex)\, b$.

Bemerkung. Der Beweis, den man bei H.-A. für Formel 34 auf S. 59 findet, führt nur zu der schwächeren Formel mit $\neg\neg (Ex)\, b$ an Stelle von $(Ex)\, b$.

6. 6. $\vdash (x)\, a \supset (Ex)\, a$.

Beweis. [6. 3, 6. 5].

6. 61. $\vdash \cdot a\,(\bar{x}) \supset \cdot \binom{p}{x} a \supset (x)\, a$.

Beweis. [6. 5, 6. 6].

6. 62. $\vdash a \supset (Ex)\, a$.

Beweis. [6. 3, 6. 5].

6. 7. $\vdash (x) \neg a \supset \neg (Ex)\, a$.

Beweis. [4. 1] $\vdash \cdot (x) \neg a \supset \cdot (x) \cdot a \supset \neg (1 \equiv 1) \cdot \supset \cdot$
[6. 52] $(Ex)\, a \supset (Ex) \neg (1 \equiv 1) \supset$ [6. 51] $\neg (1 \equiv 1) \cdot \supset \cdot$
[4. 42] $\neg (Ex)\, a$.

6. 71. $\vdash \neg (Ex)\, a \supset (x) \neg a$.

Beweis. [6. 62] $\vdash a \supset (Ex)\, a \cdot \supset \cdot$ [4. 2] $\vdash \neg (Ex)\, a \supset \neg a \cdot \supset \cdot$
[5. 7, 5. 5] $\vdash \cdot 6.\ 71$.

6. 72. $\vdash (Ex)\, a \supset \neg (x) \neg a$.

Beweis. [6. 7, 4. 21].

6. 73. $\vdash (x)\, a \supset \neg (Ex) \neg a$.

Beweis. [4. 3, 6. 4] $\vdash (x)\, a \supset (x) \neg\neg a \supset$ [6. 7] $\neg (Ex) \neg a$.

6. 74. $\vdash (Ex) \neg a \supset \neg (x)\, a$.

Beweis. [6. 73, 4. 21].

6. 75. $\vdash \neg (x) \neg a \supset \neg\neg (Ex)\, a$.

Beweis. [6. 71, 4. 2].

6. 76. $\vdash \neg (Ex) \neg a \supset (x) \neg\neg a$.

Beweis. [6. 71].

6. 77. $\vdash (Ex) \neg\neg a \supset \neg\neg (Ex)\, a$.

Beweis. [6. 74, 6. 75].

6. 78. $\vdash \neg\neg (x)\, a \supset (x) \neg\neg a$.

Beweis. [6. 3, 4. 22] $\vdash \neg\neg (x)\, a \supset \neg\neg \binom{y}{x} a \supset$ [6. 25, 6. 431] $\binom{y}{x} \neg\neg a \cdot \supset \cdot$

[5. 5] $\vdash \neg\neg (x)\, a \supset (y) \binom{y}{x} \neg\neg a \supset$ [6. 32] $(x) \neg\neg a$.

Bemerkung. Die Umkehrungen der beiden vorstehenden Formeln sind nicht beweisbar. Für 6. 77 folgt das leicht aus der Bedeutung von (Ex). Für 6. 78 zeigen wir es an dem schon von Brouwer benutzten (Math. Ann. 93, S. 256) Beispiel der Menge A aller Wahlfolgen, welche nur aus den Ziffern 1 und 2 bestehen, während nach einer 2 immer wieder eine 2 folgt. Wir ordnen jeder natürlichen Zahl ein Element von A zu in folgender Weise: Zu 1 gehört die Folge von lauter Einsen; zu 2 gehört 2222 . . ., zu 3 gehört 1222 . . ., zu 4 gehört 1122 . . ., usw.

a bedeute den Satz: »x ist einer natürlichen Zahl zugeordnet«; (x)a bedeute: »a gilt für jedes Element von A«. Dann gilt $(x) \neg\neg a$, denn wenn ein Element von A keiner natürlichen Zahl zugeordnet wäre, so müßte in ihm weder niemals, noch einmal eine 2 auftreten. Es gilt aber auch $\neg (x)\, a$, denn wenn jedem Element von A eine natürliche Zahl zugeordnet wäre, so gäbe es eine solche natürliche Zahl z, daß je zwei Elementen, die in den ersten z Ziffern übereinstimmen, dieselbe Zahl zugeordnet wäre (Brouwer, Math. Ann. 97 S. 66); also wäre allen Elementen, die mit z Einsen anfangen, dieselbe Zahl zugeordnet.

$(x) \neg\neg a \wedge \neg (x)\, a$ ist aber nach 4. 521 unverträglich mit der Umkehrung von 6. 78.

Als zweites Beispiel kann der »mehrfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten zweiter Art« (Brouwer, Proceedings Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam, XXXI, S. 378) gebraucht werden. Während nämlich $(x) \cdot \neg\neg (a \vee \neg a)$ nach 4. 8 und 5. 8 eine richtige Formel ist, ist $\neg\neg (x) \cdot a \vee \neg a$, wie die a. a. O. angeführten Beispiele zeigen, nicht für jede Aussage a richtig.

6. 8. $\vdash \cdot (Ex) \cdot a \wedge b \cdot \supset (Ex)\, a$.

Beweis. [2. 2, 6. 52].

6. 81. $\vdash \cdot (Ex) \cdot a \vee b \cdot \supset (Ex)\, a \vee (Ex)\, b$.

Beweis. [6. 62, 3. 3] $\vdash a \vee b \supset (Ex)\, a \vee (Ex)\, b \cdot \supset$: [5. 6] $\vdash \cdot$ 6. 81.

6. 82. $\vdash \cdot (Ex)\, a \wedge (x)\, b \supset \cdot (Ex) \cdot a \wedge b$.

Beweis. [2. 26, 6. 4] $\vdash : (x)\, b \supset : (x) \cdot a \supset a \wedge b \cdot \supset$: [6. 52] $(Ex)\, a \supset \cdot (Ex) \cdot a \wedge b : \cdot \supset$ [2.27] $\vdash \cdot$ 6. 82.

§ 7. Const. ϵ, ‘ (*Grundbegriffe*).

$\underset{1}{\perp}$, “ , Γ (*Abkürzungen*).

Bemerkungen. Die beiden Grundbegriffe ϵ (»ist ein . . .«) und x ‘ p (»das x von p«) werden hier nur soweit behandelt, als die nächsten Paragraphen erfordern; eine ausführliche Behandlung, besonders des Funktionsbegriffes, bleibt für später vorbehalten.

$q \underset{1}{\perp} p$ bedeutet eine eindeutige Abbildung von p auf q. p ist ihr Gebiet. x “ r bedeutet die Spezies der Bilder der Elemente einer Teilspezies r des Gebietes von x. (Whitehead and Russell gebrauchen “ in einer etwas allgemeineren Bedeutung; l. c. *37.) $x \Gamma r$ ist die Abbildung, welche den Elementen von r dieselben Bilder zuordnet wie x, aber r als Gebiet besitzt.

Bei dieser Schreibweise ist es nicht möglich, das Gebiet einer Abbildung zu erweitern, ohne die Benennung der Abbildung zu ändern. Wenn man z. B. die Funktion sin für das Gebiet der reellen Zahlen definiert hat, und man will sie auf das Gebiet der komplexen Zahlen erweitern, so ist man genötigt, dasjenige, das bisher sin hieß, weiterhin durch sin Γ (reelle Zahlen) anzudeuten.

7.01. 7.01. $\vdash . x \epsilon q \underset{1}{\perp} p \bar{\bar{\mathsf{D}}} . (r) . r \epsilon p \supset_C x \text{ ‘ } r \epsilon q .$

7.02. 7.02. $\vdash : x \epsilon q \underset{1}{\perp} p . \wedge . (y) . y \epsilon r \supset y \epsilon p . \supset :$
$s \epsilon x \text{ “ } r \bar{\bar{\mathsf{D}}} . (Et) . t \epsilon r \wedge x \text{ ‘ } t \equiv s .$

7.03. 7.03. $\vdash : x \epsilon q \underset{1}{\perp} p \wedge . (y) . y \epsilon r \supset y \epsilon p . \supset :$
$z \equiv x \Gamma r \bar{\bar{\mathsf{D}}} . z \epsilon q \underset{1}{\perp} r \wedge . (s) . s \epsilon r \supset z \text{ ‘ } s \equiv x \text{ ‘ } s .$

7.04. 7.04. $\vdash . x \text{ ‘ } y \text{ ‘ } p \bar{\bar{\mathsf{D}}} . x \text{ ‘ } . y \text{ ‘ } p .$

7.041. 7.041. $\vdash : x, y \epsilon q \underset{1}{\perp} p : \supset : x \equiv y . \bar{\bar{\mathsf{D}}} . (r) . r \epsilon p \supset x \text{ ‘ } r \equiv y \text{ ‘ } r \vee x \text{ ‘ } r \equiv y \text{ ‘ } r .$

7.1. $\vdash \vdash x \epsilon s \underset{1}{\perp} r \wedge p , q \epsilon r \wedge p \equiv q \supset x \text{ ‘ } p \equiv x \text{ ‘ } q .$

7.11. $\vdash \vdash x \epsilon q \underset{1}{\perp} p \supset x \equiv x .$

7.12. $\vdash \vdash x \epsilon q \underset{1}{\perp} p \wedge x \equiv y \wedge r \epsilon p \supset x \text{ ‘ } r \equiv y \text{ ‘ } r .$

7.2. $\vdash x \epsilon q \underset{1}{\perp} p \wedge x \equiv y \supset y \epsilon q \underset{1}{\perp} p \wedge x \equiv y .$

Beweis. [6.26, 7.1, 7.041].

Bemerkung. Die Beziehung $\equiv$ unterscheidet sich dadurch von $\equiv$, daß 6.11 für sie im allgemeinen nicht gilt.

7.21. $\vdash . x \epsilon q \underset{1}{\perp} p \wedge . (y) . y \epsilon r \supset y \epsilon p . \supset x \Gamma r \epsilon x \text{ “ } r \underset{1}{\perp} r .$

Beweis. [7.03, 7.02].

7.22. $\vdash . x \epsilon q \underset{1}{\perp} p \wedge . (y) . y \epsilon r \supset y \epsilon p . \supset . (s) . s \epsilon x \text{ “ } r \supset s \epsilon x \text{ “ } p .$

Beweis. [7.02, 6.52].

Die folgenden Definitionen dienen nur zur Abkürzung.

7.05. 7.05. $\vdash x, y \epsilon p \bar{\bar{\mathsf{D}}} x \epsilon p \wedge y \epsilon p .$

7.06. 7.06. $\vdash x, y, z \epsilon p \bar{\bar{\mathsf{D}}} x \epsilon p \wedge y \epsilon p \wedge z \epsilon p .$

§ 10. Const. N, seq. (*Grundbegriffe*).

≡, =, +, —, >, < (*Abkürzungen*).

Bemerkungen. N (Numerus) bedeutet natürliche Zahl; seq'p die auf p folgende Zahl.

10. 1. $\vdash\vdash 1 \in N$.

10. 11. $\vdash\vdash 1 \equiv 1$. (Ist dasselbe wie 6. 1, nur bequemlichkeitshalber wiederholt.)

10. 12. $\vdash\vdash \mathrm{seq} \in N \perp N$.

10. 13. $\vdash\vdash p \in N \supset \neg(\mathrm{seq}' p \equiv 1)$.

10. 14. $\vdash\vdash \cdot \binom{1}{x} a \wedge \cdot (p) \cdot p \in N \wedge \binom{p}{x} a \supset \binom{\mathrm{seq}' p}{x} a \cdot \supset \cdot (q) \cdot q \in N \supset \binom{q}{x} a$.

10. 15. $\vdash\vdash p, q \in N \wedge \mathrm{seq}' p \equiv \mathrm{seq}' p \supset p \equiv q$.

Bemerkungen. 10. 14 ist der Grundsatz der vollständigen Induktion. Dieser wird gebraucht in Beweisen, wo die eigentliche Mathematik auf die Entstehungsweise der natürlichen Zahlen zurückgreift. Obgleich es gelingt, so alle Sätze zu beweisen, ist es doch nur ein unvollkommenes Hilfsmittel zur Ersetzung des wirklichen Aufbaues.

Nach 10. 15 sind wir berechtigt, die Zahlengleichheit = für natürliche Zahlen mit der Beziehung ≡ zu identifizieren.

10.01. 10. 01. $\vdash \cdot p, q \in N \supset \cdot p = q \mathrel{\bar{\bar{\delta}}} p \equiv q \mathrel{\bar{\bar{\delta}}} p \equiv q$.

10. 2. $\vdash p \in N \supset p = p$.

Beweis. [7. 1] $\vdash p \in N \wedge p = p \supset \mathrm{seq}' p = \mathrm{seq}' p \cdot \supset \cdot$

[10. 11, $\binom{x = x}{a}$ 10. 14] $\vdash q \in N \supset q = q$.

Man beachte bei diesem und vielen folgenden Beweisen, daß wegen 6. 402 und 5. 8 ein »Allzeichen« (x) nach dem Behauptungszeichen ⊢ nach Belieben gesetzt oder weggelassen werden kann.

10. 21. $\vdash p \in N \wedge p = q \supset q \in N$.

Beweis. [6. 26].

10. 22. $\vdash p \in N \wedge p = q \supset q = p$.

Beweis. [6. 12].

10. 221. $\vdash p \in N \wedge p = q \wedge q = r \supset p = r$.

Beweis. [6. 452].

10. 23. $\vdash \cdot p \in N \wedge p = q \supset \cdot \binom{p}{x} a \supset C \binom{q}{x} a$.

Beweis. [6. 26].

10. 24. $\vdash \cdot p \in N \supset \cdot p = q \supset C \mathrm{seq}' p = \mathrm{seq}' q$.

Beweis. [10. 15. 7. 1].

10. 25. $\vdash p, q \varepsilon N \supset p = q \vee \neg (p = q)$.

Beweis. [10. 2, 6. 11].

10. 26. $\vdash p \varepsilon N \supset \neg (\mathrm{seq}'p = p)$.

Beweis. [10. 1, 10. 13] $\vdash \neg (\mathrm{seq}'1 = 1)$. (1)

[10. 24] $\vdash p \varepsilon N \wedge \mathrm{seq}'\mathrm{seq}'p = \mathrm{seq}'p \supset \mathrm{seq}'p = p \cdot \supset \cdot$

[4. 23] $\vdash p \varepsilon N \wedge \neg (\mathrm{seq}'p = p) \supset \neg (\mathrm{seq}'\mathrm{seq}'p = \mathrm{seq}'p)$. (2)

[(1), (2), 10. 14] $\vdash \cdot$ 10. 26.

Wir führen jetzt die Zeichen + und — ein, hauptsächlich mit Rücksicht auf die Definition von endlichen Zahlenreihen.

10. 03. 10. 03. $\vdash \cdot p \varepsilon N \supset \cdot p + 1 \mathrel{\overline{\overline{D}}} \mathrm{seq}'p$.

10. 04. 10. 04. $\vdash \cdot p, q \varepsilon N \supset \cdot p + \mathrm{seq}'q \mathrel{\overline{\overline{D}}} \mathrm{seq}'(p + q)$.

10. 4. $\vdash p, q \varepsilon N \supset p + q \varepsilon N$.

Beweis. [10. 03, 10. 12] $\vdash p \varepsilon N \supset p + 1 \varepsilon N$. (1)

[10. 04, 10. 12] $\vdash \cdot q \varepsilon N \wedge \cdot (p) \cdot p \varepsilon N \supset p + q \varepsilon N \cdot \supset \cdot$

$(p) \cdot p \varepsilon N \supset p + \mathrm{seq}'q \varepsilon N$. (2)

[(1), (2), 10. 14] $\vdash \cdot$ 10. 4.

10. 41. $\vdash p, q, r \varepsilon N \wedge q = r \supset p + q = p + r$.

Beweis. $\vdash \cdot p, q, r \varepsilon N \supset \cdot q = r \wedge \neg (p + q = p + r) \supset$

[10. 23] $\neg (p + q = p + q) \cdot \supset \cdot$

[10. 4, 10. 2, 4. 24] $\neg (q = r \wedge \neg (p + q = p + r)) : \supset :$

[4. 7] $\vdash p, q, r \varepsilon N \wedge q = r \supset \neg \neg (p + q = p + r) \supset$

[10. 25, 4. 45] $p + q = p + r$.

10. 411. $\vdash p, q, r \varepsilon N \wedge p = q \supset p + r = q + r$.

Beweis. [Wie für 10. 41].

10. 412. $\vdash p, q, r, s \varepsilon N \wedge p = q \wedge r = s \supset p + r = q + s$.

Beweis. [10. 41, 10. 411].

10. 42. $\vdash p, q, r \varepsilon N \supset (p + q) + r = p + (q + r)$.

Beweis. [10. 04, 10. 03] $\vdash p, q \varepsilon N \supset (p + q) + 1 = p + (q + 1)$. (1)

$\vdash \cdot r \varepsilon N \wedge \cdot (p) \cdot (q) \cdot p, q \varepsilon N \supset (p + q) + r = p + (q + r) \cdot$

$\supset \cdot$ [10. 04] $p + q + \mathrm{seq}'r = \mathrm{seq}'((p + q) + r) =$

[10. 24] $\mathrm{seq}'(p + (q + r)) = p + \mathrm{seq}'(q + r) =$

[10. 41] $p + (q + \mathrm{seq}'r)$. (2)

[(1), (2), 10. 14] $\vdash \cdot$ 10. 42.

10. 43. $\vdash p \varepsilon N \supset p + 1 = 1 + p$.

Beweis. [10. 1, 10. 2, 10. 4] $\vdash 1 + 1 = 1 + 1$. (1)

[10. 411, 10. 42] $\vdash p \varepsilon N \wedge p + 1 = 1 + p \supset$
$(p + 1) + 1 = (1 + p) + 1 = 1 + (p + 1) \supset$
$\mathrm{seq}' p + 1 = 1 + \mathrm{seq}' p$. (2)

[(1), (2), 10. 14] $\vdash \cdot$ 10. 43.

10. 431. $\vdash p, q \varepsilon N \supset p + q = q + p$.

Beweis. $\vdash \cdot q \varepsilon N \wedge \cdot (p) \cdot p \varepsilon N \supset p + q = q + p \cdot \supset \cdot$
[10. 43, 10. 42] $(p) \cdot p \varepsilon N \supset p + (q + 1) = p + (1 + q) =$
$(p + 1) + q = q + (p + 1) = q + (1 + p) = (q + 1) + p \supset$
$p + \mathrm{seq}' q = \mathrm{seq}' q + p : \supset :$
[10. 43, 10. 14] $\vdash \cdot$ 10. 431.

10. 44. $\vdash p, q, r \varepsilon N \wedge p + r = q + r \supset p = q$.

Beweis. [10. 15] $\vdash p, q \varepsilon N \wedge p + 1 = q + 1 \supset p = q$. (1)

$\vdash \cdot r \varepsilon N \wedge \cdot (p) \cdot (q) \cdot p, q \varepsilon N \wedge p + r = q + r \supset p = q \cdot \supset \cdot$
$(p) \cdot (q) \cdot p, q \varepsilon N \wedge p + \mathrm{seq}' r = q + \mathrm{seq}' r \supset$ [10. 42, 10. 43]
$\mathrm{seq}' p + r = \mathrm{seq}' q + r \supset \mathrm{seq}' p = \mathrm{seq}' q$. (2)

[(1), (2), 10. 14] $\vdash \cdot$ 10. 44.

10. 45. $\vdash p, q \varepsilon N \supset \neg (p + q = p)$.

Beweis. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge p + q = p \supset$ [10. 24] $\mathrm{seq}' (p + q) = \mathrm{seq}' p \supset$
[10. 04] $p + \mathrm{seq}' q = p + 1 \supset$ [10. 431, 10. 44]
$\mathrm{seq}' q = 1 \cdot \supset \cdot$ [10. 13, 4. 24, 4. 52] $\vdash \cdot$ 10. 45.

10.05. 10. 05. $\vdash \cdot p, q \varepsilon N \supset \cdot r = p - q \overline{\overline{D}} q + r = p$.

10.06. 10. 06. $\vdash \cdot p, q \varepsilon N \supset \cdot p > q \overline{\overline{D}} q < p \overline{\overline{D}} p - q \varepsilon N$.

10. 5. $\vdash p \varepsilon N \supset \mathrm{seq}' p > p$.

Beweis. [10. 03, 10. 05] $\vdash p \varepsilon N \supset \mathrm{seq}' p - p = 1 \supset \mathrm{seq}' p - p \varepsilon N \supset$
[10. 06] $\mathrm{seq}' p > p$.

10. 51. $\vdash p \varepsilon N \supset \neg (p > p)$.

Beweis. $\vdash p \varepsilon N \wedge p > p \supset p - p \varepsilon N \wedge p + (p - p) = p \cdot \supset \cdot$
[10. 45, 4. 24, 4. 52] $\vdash \cdot$ 10. 51.

10. 511. $\vdash p \varepsilon N \wedge q = p \supset \neg (p > q)$.

$\left[\binom{\neg (p > x)}{a}\ 10.\ 23,\ 10.\ 51\right]$.

10. 512. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge p > q \supset \neg (p = q)$.

Beweis. [10. 511, 4. 23, 4. 3].

10. 513. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge q > p \supset \neg (p > q)$.

Beweis. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge q > p \wedge p > q \supset q - p \varepsilon N \wedge p - q \varepsilon N \wedge$
$q + (p - q) = p \wedge p + (q - p) = q \supset$
[10. 412, 10. 42, 10. 431] $(p - q) + (q - p) \varepsilon N \wedge$
$(p + q) + ((p - q) + (q - p)) = p + q \cdot \supset$.
[10. 45, 4. 24, 4. 52] $\vdash \cdot$ 10. 513.

10. 514. $\vdash p, q, r \varepsilon N \wedge p < q \wedge q < r \supset p < r$.

Beweis. $\vdash$ Hyp. $\supset q - p \varepsilon N \wedge r - q \varepsilon N \wedge$
$p + (q - p) = q \wedge q + (r - q) = r \supset$
[10. 4, 10. 42] $(q - p) + (r - q) \varepsilon N \wedge$
$p + ((q - p) + (r - q)) = q + (r - q) = r \supset p < r$.

Es ist jetzt bewiesen, daß $p = q$, $p > q$ und $p < q$ einander ausschließen: in den folgenden Sätzen beweisen wir, daß für jedes Paar von natürlichen Zahlen eine dieser Beziehungen besteht.

10. 52. $\vdash p \varepsilon N \supset p = 1 \vee p > 1$.

Beweis. [10. 11, 3. 1] $\vdash 1 = 1 \vee 1 > 1$. (1)
$\vdash \cdot p \varepsilon N \wedge \cdot p = 1 \vee p > 1 \cdot \supset$
[10. 5, 10. 514, 3. 1] $\mathrm{seq}' p = 1 \vee \mathrm{seq}' p > 1$. (2)
[(1), (2), 10. 14] $\vdash \cdot$ 10. 52.

10. 521. $\vdash \cdot p, q \varepsilon N \supset \cdot q > p \supset C \mathrm{seq}' q > \mathrm{seq}' p$.

Beweis. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge q > p \supset$ [10. 06, 10. 42, 10. 431]
$q - p \varepsilon N \wedge \mathrm{seq}' q = (p + (q - p)) + 1 = \mathrm{seq}' p + (q - p) \supset$
$\mathrm{seq}' q > \mathrm{seq}' p$.
$\vdash p, q \varepsilon N \wedge \mathrm{seq}' q > \mathrm{seq}' p \supset$ [10. 06, 10. 431]
$\mathrm{seq}' q - \mathrm{seq}' p \varepsilon N \wedge \mathrm{seq}' q = (\mathrm{seq}' q - \mathrm{seq}' p) + \mathrm{seq}' p =$
[10. 04] $\mathrm{seq}' ((\mathrm{seq}' q - \mathrm{seq}' p) + p) \supset$ [10. 15]
$q = (\mathrm{seq}' q - \mathrm{seq}' p) + p \supset q > p$.

10. 522. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge q > \mathrm{seq}' p \supset q > p$.

Beweis. [10. 5, 10. 514].

10. 523. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge p > q \supset p = \mathrm{seq}' q \vee p > \mathrm{seq}' q$.

Beweis. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge p - q = 1 \supset p = \mathrm{seq}' q$. (1)
$\vdash p, q \varepsilon N \wedge p > q \wedge p - q > 1 \supset (p - q) - 1 \varepsilon N \wedge$
$p = q + (p - q) = q + (1 + ((p - q) - 1))$
$= (q + 1) + ((p - q) - 1)) \supset p > \mathrm{seq}' q$. (2)
[(1), (2), 10. 52] $\vdash \cdot$ 10. 523.

10. 524. $\vdash p, q \varepsilon N \supset p = q \vee p > q \vee p < q$.

Beweis. $\vdash p \varepsilon N \supset$ [10. 52] $p = 1 \vee p > 1 \vee p < 1$. (1)

$\vdash \cdot q \varepsilon N \wedge \cdot (p) \cdot p \varepsilon N \supset p = q \vee p > q \vee p < q \cdot \supset \cdot$
[10. 5, 10. 523, 10. 522, 3. 3]

$(p) \cdot p \varepsilon N \supset p = \mathrm{seq}' q \vee p > \mathrm{seq}' q \vee p < \mathrm{seq}' q$. (2)

[(1), (2), 10. 14] $\vdash \cdot$ 10. 524.

10. 54. $\vdash p, q, r \varepsilon N \wedge p > q \wedge r < p - q \supset p > q + r$.

Beweis. $\vdash$ Hyp. $\supset (p - q) - r \varepsilon N \wedge p = q + (p - q)$
$= q + (r + ((p - q) - r)) = (q + r) + ((p - q) - r) \supset$
$p > q + r$.

10. 55. $\vdash \cdot p \varepsilon N \wedge \binom{1}{x} a \wedge \cdot (q) \cdot q \varepsilon N \wedge q < p \wedge \binom{q}{x} a \supset \binom{\mathrm{seq}' q}{x} a \cdot \supset \cdot$

$(r) \cdot r \varepsilon N \wedge r < p + 1 \supset \binom{r}{x} a$.

Das ist der Induktionssatz für eine endliche Reihe.

Beweis. $\vdash$ [3. 1] Hyp. $\supset \binom{1}{x} a \vee \neg (1 < \mathrm{seq}' p)$ (1)

$\vdash$ [10. 524] $p . r \varepsilon N \supset \mathrm{seq}' r < \mathrm{seq}' p \vee \neg (\mathrm{seq}' r < \mathrm{seq}' p) \supset$
[10. 521] $r < p \vee \neg (\mathrm{seq}' r < \mathrm{seq}' p)$. (2)

[10. 522, 4. 2] $\vdash p, q \varepsilon N \wedge \neg (q < \mathrm{seq}' p)$
$\supset \neg (\mathrm{seq}' q < \mathrm{seq}' p)$. (3)

$\vdash :$ Hyp. $\supset : (q) : q \varepsilon N \wedge \cdot \binom{q}{x} a \vee \neg (q < \mathrm{seq}' p) \cdot \supset \cdot$

[(2), (3)] $\binom{\mathrm{seq}' q}{x} a \vee \neg (\mathrm{seq}' q < \mathrm{seq}' p)$. (4)

[(1), (4). 10. 14] $\vdash \cdot$ Hyp. $\supset \cdot (r) \cdot r \varepsilon N \supset \binom{r}{x} a \vee \neg (r < \mathrm{seq}' p)$
$: \supset :$ [4. 71] $\vdash \cdot$ 10. 55.

Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.

Von Dr. A. Heyting
in Enschede (Niederlande).

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

III.

Einleitung.

In zwei früheren Abhandlungen[1] habe ich einen Teil der intuitionistischen Logik und Mathematik formalistisch dargestellt und die Beziehungen zwischen den Grundbegriffen untersucht. Diese Untersuchungen waren insofern unvollständig, als darin von demjenigen Begriff, der kennzeichnend ist für die intuitionistische Mathematik, nämlich der freien Wahlfolge, nicht die Rede war. Hier fülle ich diese Lücke aus. Diese Arbeit ist also eine unmittelbare Fortsetzung der beiden vorigen; die Formeln daraus werden hier einfach durch ihre Nummer angeholt und die Numerierung wird hier fortgesetzt.

Als einziges neues Zeichen für einen Grundbegriff tritt das Wahlzeichen auf (12.1). Neben der Definition der Wahlfolge geben wir eine Zerlegung der Mengendefinition von Brouwer (Int. Math. I, S. 244). Diese Definition (13.01) benutzt das Wahlzeichen nicht; sie hätte gleich nach § 11 folgen können. Für den Begriff des Mengenelementes (Elm. 13.03, 13.04) ist aber das Wahlzeichen unentbehrlich.

In § 15 definiere ich noch die wichtigsten Beziehungen zwischen Spezies. Damit schließe ich diese Abhandlung, weil bei dem weiteren Aufbau der Mathematik, wie ich glaube, keine neuen Grundbegriffe mehr auftreten, und die Schwierigkeiten entweder von derselben Art sind wie die hier schon behandelten oder auch in der klassischen Mathematik vorkommen.

Der Unterschied der Beziehungen $\equiv$ und Ξ tritt hier deutlicher hervor als früher. Ξ bedeutet »ist derselbe Gegenstand als«; dieser Begriff ist Grundbegriff und nicht definierbar; man kann nur als Axiom festsetzen, daß ein Zeichen diese Beziehung zu sich selbst hat und also einen Gegenstand darstellt. $\equiv$ ist das Zeichen für mathematische Identität; diese wird für jede Art von Gegenständen einzeln definiert. Daß die beiden Beziehungen nicht dasselbe sind, habe ich schon in der Einleitung von II durch ein Beispiel

[1] Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin 1930. S. 42. Zitiert als I. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik II. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin 1930. S. 57. Zitiert als II.

verdeutlicht. $\equiv$ tritt viel häufiger auf als $\overline{\overline{\equiv}}$, weil gewöhnlich solche Eigenschaften betrachtet werden, die, wenn sie für einen Gegenstand gelten, auch für jeden mit ihm identischen Gegenstand richtig sind. Die Definition der Spezies in Int. Math. I genügt dieser Forderung nicht, denn eine Spezies, welche eine zweite Spezies als Element enthält, braucht nach dieser Definition nicht jede mit dieser identische Spezies zu enthalten. Jetzt gibt Prof. Brouwer die Definition so, daß der genannten Forderung genügt wird; dazu dient die Einführung der Mengenspezies (MS, 13.08 bis 13.083). Ich folge hier dieser neuen Definition.

Verzeichnis der gebrauchten Zeichen.

Bei jedem Zeichen geben wir in Klammern die Stelle, wo man seine Definition oder Grundeigenschaften findet.

Gruppe Ia. $\supset$ (§ 2), $\supset\subset$ (2.01), $\overline{\overline{\mathrm{D}}}$ (1.6).

Gruppe Ib. $\wedge$ (§ 2), $\vee$ (§ 3).

Gruppe IIa. ε (§ 7, 13.03), $\subset$ (13.06, 13.082, 15.05), $\in$ (15.06), $\urcorner$ (15.08), $\overline{\overline{\equiv}}$ (§ 6), $\equiv$ (7.041, 11.07, 12.04, 13.05, 13.07, 13.083, 15.04), $\overline{\overline{\underset{\cdot}{\equiv}}}$ (15.09), $\leftrightarrow$ (15.10).

Gruppe IIb. $\frown$ (11.08), $\llcorner$ (15.07).

Gruppe III a. Γ (7.03), $\underline{\perp}$ (7.01).

Gruppe IIIb. ‘ (§ 7), “ (7.02).

Gruppe IVa. $=$ (10.01), $<$, $>$ (10.06).

Gruppe IVb. $+$ (10.03, 10.04), $-$ (10.05).

Übrige Zeichen.

$\neg$	(§ 4)	1	(§ 10)	$\underset{\rightarrow}{\mathrm{R}}_{\mathrm{p}}$	(12.01)	σ, τ	(§ 12)
.	(7.05, 7.06)	seq	(10.12)	$\underset{\rightarrow}{\mathrm{R}}\,\lfloor\ \rfloor$	(12.03)	S	(§ 15)
(x)	(§ 6)	N	(§ 10)	M	(13.02)	$\vec{\alpha}$	(11.04)
$\binom{\mathrm{p}}{\mathrm{x}}$	(§ 6)	Z	(11.01)	M $\lfloor\ \rfloor$	(13.01)	$\vec{\beta}$	(11.05)
		R	(11.02)	Elm	(13.04)	λ	(13.01)
(Ex)	(§ 6)	L	(11.06)	MS	(13.081)	ρ	(13.03)
$(\overline{\mathrm{x}})$	(6.01)	$\underset{\rightarrow}{\mathrm{R}}$	(12.02)	St	(12.02)	μ	(13.08)

Die Einteilung der Zeichen in Gruppen hat zum Zweck die Herabsetzung der Punktezahl durch die folgende Regel: je höher ein Zeichen im obigen Verzeichnis steht, je schwächer bindet es. Man spaltet eine Formel also zuerst bei der größten Punktegruppe; wenn es mehrere gleichgroße Gruppen gibt, spaltet man zuerst bei dem Zeichen, das am schwächsten bindet und also im Verzeichnis am höchsten steht (zur Gruppe mit der niedrigsten Nummer gehört). Das Zeichen $\vdash$ reicht so weit, bis eine größere Zahl von Punkten erreicht ist als diejenige, von welcher es begleitet wird; die Klammerzeichen (x), (Ex), $\binom{\mathrm{p}}{\mathrm{x}}$, $(\overline{\mathrm{x}})$ reichen bis ein Zeichen aus Gruppe Ia. b mit der gleichen Punktezahl oder bis eine größere Punktezahl.

Die Beweise sind, ähnlich wie in den früheren Abhandlungen, nur angedeutet. Auf Formeln aus jenen früheren Aufsätzen wird durch ihre Nummer allein verwiesen. Man wird diese Abhandlung nur dann lesen können, wenn man sich mit dem Gebrauch der wichtigsten Zeichen aus jenen und mit den Regeln aus §§ 1 und 5 vertraut gemacht hat.

Vorbemerkungen zu § 11.

Dieser Paragraph enthält Vorbereitungen zur Mengendefinition. Das Zeichen Z für Anfangssegment der Reihe der natürlichen Zahlen gebraucht schon PEANO; das Funktionszeichen ' habe ich hinzugefügt, um in Übereinstimmung mit der Bezeichnung bei R & W, *30 zu bleiben. R_p bedeutet »Reihe von p natürlichen Zahlen«; es wird als eindeutige Funktion, welche Z ' p als Gebiet besitzt, definiert (11.02). 11.2 sagt aus, daß die R_p Gegenstände sind.

Die Relation α bedeutet »ist unmittelbare Fortsetzung von«. Nach R & W *32 bildet man daraus die Spezies $\breve{\alpha}$ ' x der unmittelbaren Fortsetzungen von x. Weil wir noch keine Relationslogik aufgebaut haben, wird $\breve{\alpha}$ ' x hier unmittelbar definiert. Das gleiche gilt für $\breve{\beta}$ ' x, die Spezies der Fortsetzungen von x.

In der Definition einer bestimmten Menge muß immer ein Gesetz enthalten sein, das angibt, welche Wahlen, nachdem eine endliche Reihe von Wahlen gemacht worden ist, zur Hemmung des Prozesses führen (»verbotene Wahlen«) und welche nicht (»gestattete Wahlen«). Dieses Gesetz wird am leichtesten dadurch gegeben, daß man die Spezies derjenigen endlichen Zahlenreihen, welche, als Anfangssegment einer Wahlfolge betrachtet, nur gestattete Wahlen enthalten, angibt. Nach der Mengendefinition (Int. Math. I, § 1) muß diese Spezies folgende Eigenschaften haben:

1. Jede endliche Zahlenreihe gehört zu ihr oder nicht.

2. Sie enthält zu jedem ihrer Elemente wenigstens eine unmittelbare Fortsetzung.

3. Wenn ein Element der Spezies mehr als eine Zahl enthält, so ist es unmittelbare Fortsetzung einer Zahlenreihe, welche ebenfalls zur Spezies gehört.

Eine derartige Spezies nennen wir ein L. 11.06 gibt die Definition.

§ 11. Const. Z, R, $\breve{\alpha}$, $\breve{\beta}$, L, $\frown$ (*Abkürzungen*).

11.01. 11.01. $\vdash \cdot p \varepsilon N \supset \cdot q \varepsilon Z ' p \overline{\overline{D}} q \varepsilon N \wedge q < p + 1$.

11.02. 11.02. $\vdash \cdot p \varepsilon N \supset \cdot R_p \overline{\overline{D}} N \perp Z ' p$. [Def. 7.01]

11.03. 11.03. $\vdash \cdot x \varepsilon R_N \overline{\overline{D}} \cdot (Ep) \cdot p \varepsilon N \wedge x \varepsilon R_p$.

11.1. $\vdash . p, q \varepsilon N \wedge p > q \supset \cdot (x) \cdot x \varepsilon Z ' q \supset x \varepsilon Z ' p$.

Beweis. [11.01, 10.521, 10.514].

11.11. $\vdash p \varepsilon N \wedge q \varepsilon Z ' p \wedge p \varepsilon Z ' q \supset p = q$.

Beweis. [10.523, 10.511, 10.513]

$\vdash p, q \varepsilon N \wedge p > q \supset \neg (p < q + 1) \cdot \supset \cdot$

[4.21] $\vdash q \varepsilon N \wedge p \varepsilon Z ' q \supset \neg (p > q)$. (1)

[Ebenso] $\vdash p \varepsilon N \wedge q \varepsilon Z ' p \supset \neg (q > p)$. (2)

[(1), (2), 10.524, 4.47] $\vdash \cdot$ 11.11.

11. 12. $\vdash p \varepsilon N \wedge x \varepsilon Z`p+1 \supset x \varepsilon Z`p \vee x = p+1$.

Beweis. [11. 01] $\vdash \cdot p \varepsilon N \wedge x \varepsilon Z`p+1 \supset \cdot$
$x > p+1 \supset x \varepsilon Z`p+1 \wedge p+1 \varepsilon Z`x \supset$
[11. 11] $x = p+1 \cdot \supset \cdot$
[10. 511, 4. 11] $\neg (x > p+1) \cdot \supset \cdot$
[10. 524, 4. 47] $x < p+1 \vee x = p+1$.

11. 2. $\vdash p \varepsilon N \wedge x \varepsilon R_p \supset x \equiv x$.

Beweis. [7. 11].

11. 21. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge p > q \wedge x \varepsilon R_p \supset x \upharpoonright Z`q \varepsilon R_q$.

Beweis. [11. 02, 11. 1, 7. 03].

11. 22. $\vdash p \varepsilon N \wedge x, y \varepsilon R_{p+1} \wedge x \upharpoonright Z`p \equiv y \upharpoonright Z`p \wedge x`p+1 = y`p+1 \supset x \equiv y$.

Beweis. [11. 12, 7. 041].

11. 23. $\vdash \cdot p, q \varepsilon N \wedge \cdot (Ex) \cdot x \varepsilon R_p \wedge x \varepsilon R_q \cdot \supset p = q$.

Beweis. $\vdash$: Hyp. $\supset$:
[11. 02, 7. 01] $(Ex) : x`p \varepsilon N \wedge \cdot x`p \varepsilon N \supset p \varepsilon Z`q : \supset :$
[2. 15, 6. 51] $p \varepsilon Z`q$. (1)
[Ebenso] $\vdash$ Hyp. $\supset q \varepsilon Z`p$. (2)
[(1), (2), 11. 11] $\vdash \cdot$ 11. 23.

11. 24. $\vdash \cdot p, q, r \varepsilon N \wedge p > q > r \wedge x \varepsilon R_p \supset \cdot x \upharpoonright Z`q \cdot \upharpoonright Z`r \cdot \equiv x \upharpoonright Z`r$.

Beweis. [11. 02, 7. 03, 7. 041].

11. 04. 11. 04. $\vdash \cdot p \varepsilon N \wedge x \varepsilon R_p \supset \cdot y \varepsilon \vec{\alpha}`x \overline{\overline{\mathrm{D}}} y \varepsilon R_{p+1} \wedge y \upharpoonright Z`p \equiv x$.

11. 05. 11. 05. $\vdash : p \varepsilon N \wedge x \varepsilon R_p \supset : y \varepsilon \vec{\beta}`x \cdot \overline{\overline{\mathrm{D}}} \cdot (Eq) \cdot q \varepsilon N \wedge q > p \wedge y \varepsilon R_q \wedge y \upharpoonright Z`p \equiv x$.

11. 3. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge x, y \varepsilon R_p \wedge p > q \wedge x \equiv y \supset x \upharpoonright Z`q \equiv y \upharpoonright Z`q$.

Beweis. [11. 21, 11. 02, 7. 03, 7. 02].

11. 31. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge p > q \wedge x \varepsilon R_p \wedge y \varepsilon \vec{\alpha}`x \supset x \upharpoonright Z`q \equiv y \upharpoonright Z`q$.

Beweis. [11. 04, 11. 24].

11. 32. $\vdash p, q \varepsilon N \wedge p > q \wedge x \varepsilon R_p \wedge y \varepsilon \vec{\beta}`x \supset x \upharpoonright Z`q \equiv y \upharpoonright Z`q$.

Beweis. [11. 05] $\vdash \cdot$ Hyp. $\supset \cdot (Er) \cdot r \varepsilon N \wedge y \varepsilon R_r \wedge y \upharpoonright Z`p \equiv x \cdot \supset \cdot$
[6. 51] $y \upharpoonright Z`p \equiv x \cdot \supset \cdot$ [11. 24] $y \upharpoonright Z`q \equiv x \upharpoonright Z`q$.

11. 33. $\vdash x \varepsilon R_N \wedge y \varepsilon \vec{\alpha}`x \supset y \varepsilon \vec{\beta}`x$.

Beweis. [11. 04, 11. 05].

11. 34. $\vdash p \varepsilon N \wedge x \varepsilon R_{p+1} \supset x \varepsilon \vec{\alpha}`(x \upharpoonright Z`p)$.

Beweis. [11. 04].

11.341. $\vdash p, q \in N \wedge q > p \wedge x \in R_q \supset x \in \overrightarrow{\beta}`(x \upharpoonright Z`p)$.

Beweis. [11.05].

11.35. $\vdash p, q \in N \wedge x \in R_p \wedge y \in R_q \wedge y \in \overrightarrow{\alpha}`x \supset q = p + 1$.

Beweis. [11.04, 11.23].

11.36. $\vdash x \in R_N \wedge y \in \overrightarrow{\beta}`x \wedge z \in \overrightarrow{\beta}`y \supset z \in \overrightarrow{\beta}`x$.

Beweis. [11.05. 11.24].

11.06. 11.06. $\vdash : n \in L \overline{\overline{D}} : \cdot (x) : \cdot x \in n \supset x \in R_N : \wedge : x \in R_N \supset x \in n \vee \neg (x \in n) : \wedge :$
$x \in n \supset \cdot (Ey) \cdot y \in n \wedge y \in \overrightarrow{\alpha}`x : \wedge :$
$x \in n \wedge \neg (x \in R_1) \supset \cdot (Ey) \cdot y \in n \wedge x \in \overrightarrow{\alpha}`y : \cdot \wedge : \cdot$
$(p) \cdot (x) \cdot (y) \cdot p \in N \wedge x, y \in R_p \wedge x \equiv y \wedge x \in n \supset y \in n$.

11.4. $\vdash n \in L \wedge p \in N \wedge x \in n \wedge x \in R_{p+1} \supset x \upharpoonright Z`p \in n$.

Beweis. [11.06] $\vdash \cdot$ Hyp. $\supset \cdot (Ey) \cdot y \in n \wedge x \in \overrightarrow{\alpha}`y \cdot \supset \cdot$
[11.05] $(Ey)\, x \upharpoonright Z`p \in n \cdot \supset$.
[6.51] $x \upharpoonright Z`p \in n$.

11.41. $\vdash n \in L \wedge p, q \in N \wedge p > q \wedge x \in n \wedge x \in R_p \supset x \upharpoonright Z`q \in n$.

Beweis. [11.4, 10.55].

11.42. $\vdash : n \in L \wedge p \in N \wedge \cdot (Ex) \cdot x \in n \wedge x \in R_p \cdot \supset : q \in N \supset \cdot (Ey) \cdot y \in n \wedge y \in R_q \cdot$

Beweis. [11.41, 11.21] $\vdash$ Hyp. $\wedge\, q \in N \wedge p > q \supset$
$x \upharpoonright Z`q \in n \wedge x \upharpoonright Z`q \in R_q$. (1)
[6.26] $\vdash$ Hyp. $\wedge\, q \in N \wedge p = q \supset x \in n \wedge x \in R_q$. (2)
[11.06] $\vdash$ Hyp. $\wedge\, q \in N \wedge p < q : \supset :$
$(Ey) \cdot y \in n \wedge y \in R_{p+1} : \wedge :$
$(r) : r \in N \cdot \wedge \cdot (Ey) \cdot y \in n \wedge y \in R_{p+r} \cdot \supset \cdot$
$(Ez) \cdot z \in n \wedge z \in R_{p+r+1} : \wedge :$
$q - p \in N : \supset :$
[10.14] $(Eu) \cdot u \in n \wedge u \in R_q$. (3)
[(1), (2), (3). 6.5.3.51] $\vdash \cdot$ 11.42.

11.43. $\vdash \cdot n \in L \wedge p, q \in N \wedge p > q \wedge x \in n \wedge x \in R_q \supset \cdot (Ey) \cdot y \in n \wedge y \in R_p \wedge y \in \overrightarrow{\beta}`x$.

Beweis. [11.06, 11.33] $\vdash \cdot$ Hyp. $\supset \cdot$
$(Ey) \cdot y \in n \wedge y \in R_{q+1} \wedge y \in \overrightarrow{\beta}`x$. (1)
[11.06, 11.36] $\vdash :$ Hyp. $\supset :$
$r \in N \wedge \cdot (Ey) \cdot y \in n \wedge y \in R_{q+r} \wedge y \in \overrightarrow{\beta}`x \cdot \supset \cdot$
$(Ez) \cdot z \in n \wedge z \in R_{q+r+1} \wedge z \in \beta`x$. (2)
[(1), (2), 10.06, 10.14] $\vdash \cdot$ 11.43.

Die folgende Festsetzung dient dazu, die L als Individuen zu kennzeichnen.

11.5. $\vdash\vdash n \in L \supset n \equiv n$.

11.07. 11.07. $\vdash : n, m \in L \supset : n \equiv m \cdot \overline{\overline{D}} \cdot (x) \cdot x \in n \supset \subset x \in m$.

11.51. $\vdash n, m \in L \wedge n \equiv m \supset n \equiv m$.

Beweis. [6.26].

11.52. $\vdash n, m, k \in L \wedge n \equiv m \wedge m \equiv k \supset n \equiv k$.

Beweis. [11.07].

Wir definieren hier die Abkürzung $\frown$, welche im folgenden benutzt wird.

11.08. 11.08. $\vdash x \in p \frown q \overline{\overline{D}} x \in p \wedge x \in q$.

Vorbemerkungen zu § 12.

Hier wird zunächst das Wahlzeichen eingeführt. $\sigma\, p\, \tau\, q$ übersetze man durch »aus der Spezies q wird das Element p gewählt«. Man kann das gewählte Element nicht immer mit p allein bezeichnen, denn dann würde ein Widerspruch entstehen, wenn man aus zwei elementefremden Spezies je ein Element wählte und diese Elemente gleich bezeichnete. In die Bezeichnung des gewählten Elementes muß also die Spezies, aus welcher es gewählt ist, aufgenommen werden. Wir bezeichnen deshalb in $\sigma\, p\, \tau\, q$ das gewählte Element mit $p\, \tau\, q$, »das aus q gewählte p«. Nur wenn bekannt ist, daß q ein schon früher mit p bezeichnetes Element enthält, kann die Hinzufügung weggelassen werden. (12.11).

Die Definition der unbegrenzten Wahlfolge wird vorbereitet durch diejenige der $\underset{\rightarrow}{R}_p$ (»Reihe von p Zahlen mit Fortsetzungsmöglichkeit«). Dieses Zeichen wird definiert als ein L, welches nicht leer ist und nur eine einzige Reihe von p Zahlen enthält (also für $q < p$ nur eine einzige Reihe von q Zahlen; 12.32).

Man kann nicht sagen, was eine unbegrenzte Wahlfolge »ist«, denn sie »wird«. Wenn p Wahlen gemacht sind, so ist die Wahlfolge in ihrem p^{ten} Stadium ein $\underset{\rightarrow}{R}_p$. Macht man nun die $(p+1)^{te}$ Wahl, so wird das $(p+1)^{te}$ Stadium ein $\underset{\rightarrow}{R}_{p+1}$, das im vorgenannten $\underset{\rightarrow}{R}_p$ enthalten ist. Stadium wird abgekürzt als St. Im folgenden wird also der Satz »von der Wahlfolge x sind wenigstens p Wahlen gemacht« geschrieben $St_p \cdot x \in \underset{\rightarrow}{R}_p$. Auf dieser Grundlage geben wir Definition 12.02.

§ 12. Const. σ, τ, St (*Grundbegriffe*), $\underset{\rightarrow}{R}$, $\underset{\rightarrow}{R}|\ \ |$ (*Abkürzungen*).

12.1. $\vdash\vdash \sigma\, p\, \tau\, q \supset p\, \tau\, q \in q$.

12.11. $\vdash\vdash x \in p \wedge \sigma\, x\, \tau\, p \supset x\, \tau\, p \equiv x$.

12.12. $\vdash\vdash \cdot\, a \vee \neg a \wedge \cdot \sigma\, p\, \tau\, q \supset a \cdot \supset a$.

Diese Formel sagt aus: wenn der Satz a entweder richtig oder unrichtig sein muß, so kann eine nachträgliche Wahl an der Richtigkeit oder Unrichtigkeit von a nichts mehr ändern.

Jetzt folgt, in zwei Stufen 12.01 und 12.02, die Definition der Wahlfolge $\underset{\rightarrow}{R}$.

12.01. 12.01. $\vdash : p \varepsilon N \supset : x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \overline{\overline{D}} \cdot$
$x \varepsilon L \cdot \wedge \cdot (Ey) \cdot y \varepsilon x \frown R_r \cdot \wedge \cdot (q) \cdot (r) \cdot q, r \varepsilon x \frown R_p \supset q \equiv r.$

12.011. 12.011. $\vdash : x \varepsilon L \wedge p \varepsilon N : \supset : y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p | x | \cdot \overline{\overline{D}} \cdot y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \cdot \wedge \cdot (z) \cdot z \varepsilon y \supset z \varepsilon x.$

12.02. 12.02. $\vdash : x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} : \overline{\overline{D}} : St_r ` x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_r : \wedge :$
$(p) : p \varepsilon N \wedge St_p ` x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \cdot \supset \cdot$
$(q) \cdot \sigma\, q\, \tau \underset{\rightarrow}{R}_{p+1} | St_p ` x | \supset \subset St_{p+1} ` x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_{p+1} \cdot \wedge \cdot$
$(q) \cdot \sigma\, q\, \tau \underset{\rightarrow}{R}_{p+1} | St_p ` x | \supset St_{p+1} ` x \equiv q\, \tau \underset{\rightarrow}{R}_{p+1} | St_p ` x |.$

12.03. 12.03. $\vdash : x \varepsilon L \supset : y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} | x | \cdot \overline{\overline{D}} \cdot y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} \cdot \wedge \cdot (z) \cdot z \varepsilon St_r ` y \supset z \varepsilon x.$

$y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} | x |$ bedeutet also, daß y eine in dem »L« x enthaltene Folge ist.

12.2. $\vdash \vdash x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} \supset x \equiv x.$

12.04. 12.04. $\vdash : x, y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} : \supset : x \equiv y \cdot \overline{\overline{D}} \cdot$
$(p) \cdot p \varepsilon N \wedge St_p ` x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \supset St_p ` y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \wedge St_p ` x \equiv St_p ` y.$

12.21. $\vdash \vdash : p \varepsilon N \wedge x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \supset : (Ey) : y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} \wedge \cdot St_p ` y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \supset St_p ` y \equiv x.$

12.22. $\vdash \vdash : \cdot \xi \varepsilon N \mathrel{\dot{1}} \underset{\rightarrow}{R} \wedge x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} : \cdot \supset :$
$(Ep) : \cdot p \varepsilon N : \wedge : (y) : y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} \cdot \wedge \cdot St_p ` x, St_p ` y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \supset (St_p ` x \frown R_p)$
$\equiv (St_p ` y \frown R_p) \cdot \supset \cdot$
$\xi ` x \equiv \xi ` y.$

Das heißt: ist jedem $\underset{\rightarrow}{R}$ eine natürliche Zahl zugeordnet, so muß die einem bestimmten $\underset{\rightarrow}{R}$ zugeordnete Zahl nach einer endlichen Anzahl von Wahlen bekannt sein. Dieser Satz kann als Axiom vielleicht durch eine formal einfachere, aber nicht durch eine intuitionistisch selbstverständlichere Aussage ersetzt werden.

12.31. $\vdash \cdot x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} \wedge p \varepsilon N \wedge \cdot (q) \cdot q \varepsilon Z ` p \supset \sigma\, y\, \tau \underset{\rightarrow}{R}_{q+1} | St_q ` x | \cdot \supset \cdot$
$St_{p+1} ` x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_{p+1}.$

Beweis. $\vdash$ Hyp. $\supset$ | 12.02 | $St_r ` x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_r.$ (1)
$\vdash$ Hyp. $\wedge\, s \varepsilon Z ` p \wedge St_s ` x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_s \supset$ | 12.02 | $St_{s+1} ` x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_{s+1}.$ (2)
|(1), (2), 10.55| $\vdash$ 12.31.

12.32. $\vdash x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \wedge p, q \varepsilon N \wedge q < p \wedge y, z \varepsilon (x \frown R_q) \supset y \equiv z.$

Beweis. $\vdash$ Hyp. $\supset \cdot$ | 11.43, 11.05|
$(Eu) \cdot u \varepsilon (x \frown R_p) \wedge (u \upharpoonright Z ` q) \equiv y \cdot \wedge \cdot$
$(Ev) \cdot v \varepsilon (x \frown R_p) \wedge (v \upharpoonright Z ` q) \equiv z \cdot \supset \cdot$ |6.61, 6.82|
$(Eu) \cdot (Ev) \cdot u, v \varepsilon (x \frown R_p) \wedge (u \upharpoonright Z ` q) \equiv y \wedge (v \upharpoonright Z ` q) \equiv z \cdot \supset \cdot$
| 12.01, 11.3| $(Eu)\,(Ev)\, y \equiv z \cdot \supset \cdot$
|6.51| $y \equiv z.$

12.33. $\vdash x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} \wedge p \varepsilon N \wedge St_p \text{`} x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_p \wedge y \varepsilon St_p \text{`} x \supset y \varepsilon St_r \text{`} x$.

Beweis. $\vdash y \varepsilon St_r \text{`} x \supset y \varepsilon St_r \text{`} x$. (1)

$\vdash : r \varepsilon N \wedge :$

$(x) : (y) : x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} \wedge St_r \text{`} x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_r \wedge y \varepsilon St_r \text{`} x \supset y \varepsilon St_1 \text{`} x : \supset :$

$(x) \cdot (y) \cdot x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} \wedge St_{r+1} \text{`} x \varepsilon \underset{\rightarrow}{R}_{r+1} \wedge y \varepsilon St_{r+1} \text{`} x \supset$

$|12.02| y \varepsilon St_r \text{`} x \supset y \varepsilon St_1 \text{`} x$. (2)

$|(1), (2), 10.14| \vdash \cdot 12.33$.

12.34. $\vdash p \varepsilon N \wedge : (q) : q \varepsilon Z \text{`} p \supset \sigma (x \text{`} q) \tau (y \text{`} q) \cdot \supset a : \wedge : a \vee \neg a : \supset a$.

Diese Formel dehnt 12.12 aus auf eine endliche Folge von Wahlen.

Beweis. $\vdash : \cdot r \varepsilon N \wedge : (s) : s \varepsilon Z \text{`} r \supset \sigma (x \text{`} s) \tau (y \text{`} s) \cdot \supset \cdot a : \wedge : a \vee \neg a :$
$\supset a : \cdot \supset : \cdot$

$(s) : s \varepsilon Z \text{`} r + 1 \supset \sigma (x \text{`} s) \tau (y \text{`} s) \cdot \supset \cdot a : \wedge : a \vee \neg a : \supset :$

$|11.12, 3.12, 2.282|$

$\sigma (x \text{`} r + 1) \tau (y \text{`} r + 1) \supset a \cdot \wedge \cdot a \vee \neg a : \supset |12.12| a : : \supset$

$|12.12, 10.14| \vdash \cdot 12.34$.

§ 13. Const. M, M| |, λ, ρ, Elm, $\subset$, μ, MS (*Abkürzungen*).

13.01. 13.01. $\vdash : : q \varepsilon p \supset q \equiv q \supset : : x \varepsilon M|p| \overline{\overline{D}} : \cdot \lambda \text{`} x \varepsilon L \wedge : .$
$(y) : \cdot y \varepsilon \lambda \text{`} x : \supset : x \text{`} y \varepsilon p : \vee :$
$(Ez) : z \varepsilon R_N \wedge y \varepsilon \vec{\beta} \text{`} z \wedge x \text{`} z \varepsilon p \cdot \wedge \cdot (u) \cdot u \varepsilon \vec{\beta} \text{`} z \supset \neg (x \text{`} u \varepsilon p)$.

M|p| bedeutet »Menge, deren Elemente Folgen von Elementen der Spezies p sind«. Die zwischen : : vorangestellte Bedingung sagt aus, daß wir nur Mengen betrachten, für welche die Elemente von p Gegenstände sind. λ ist die konstante Funktion, welche einer Menge die ihr zugrunde liegende Spezies von endlichen Zahlenreihen, welche aus »gestatteten Wahlen« bestehen, zuordnet (vgl. die Vorbemerkungen zu § 11). Die dritte Zeile der Definition bezieht sich auf die Möglichkeit, daß nach einer bestimmten Wahl jede weitere Wahl immer wieder nichts erzeugt. Int. Math. I, § 1, Fußnote 2.

13.02. 13.02. $\vdash : x \varepsilon M \overline{\overline{D}} : (Ep) : (q) \cdot q \varepsilon p \supset q \equiv q \cdot \wedge \cdot x \varepsilon M|p|$.

13.03. 13.03. $\vdash : \cdot x \varepsilon M \supset : \cdot y \varepsilon x \overline{\overline{D}} :$
$\rho \text{`} y \varepsilon \underset{\rightarrow}{R} |\lambda \text{`} x| \cdot \wedge \cdot (p) \cdot (u) \cdot p \varepsilon N \wedge u \varepsilon (St_p \text{`} \rho \text{`} y \frown R_p) \supset y \text{`} p \equiv x \text{`} u$.

Hierdurch wird ε definiert für Mengen. ρ ist die Funktion, welche einem Mengenelement die ihm zugrunde liegende Wahlfolge zuordnet.

13.04. 13.04. $\vdash \cdot y \varepsilon Elm \cdot \overline{\overline{D}} \cdot (Ex) \cdot x \varepsilon M \wedge y \varepsilon x$.

Die folgenden Axiome und Definitionen legen die Begriffe $\equiv$ und $\overline{\equiv}$ für M und Elm fest. $\equiv$ ist immer der engere Begriff.

13.1. $\vdash \vdash x \varepsilon M \supset x \equiv x$.

13.11. $\vdash \vdash x \varepsilon Elm \supset x \overline{\equiv} x$.

13. 05. 13. 05. $\vdash : x . y \varepsilon \mathrm{Elm} : \supset : x \equiv y \cdot \overline{\overline{\mathrm{D}}} \cdot$
$(p) \cdot p \varepsilon N \wedge \mathrm{St}_p \text{`} \rho \text{`} x , \mathrm{St}_p \text{`} \rho \text{`} y \varepsilon \mathrm{R}_p \supset x \text{`} p \equiv y \text{`} p .$

13. 06. 13. 06. $\vdash : \cdot x , y \varepsilon M : \supset : \cdot x \subset y : \overline{\overline{\mathrm{D}}} : (z) : z \varepsilon x \cdot \supset \cdot (\mathrm{E}u) \cdot u \varepsilon y \wedge u \equiv z .$

13. 07. 13. 07. $\vdash \cdot x , y \varepsilon M \supset \cdot x \equiv y \overline{\overline{\mathrm{D}}} x \subset y \wedge y \subset x .$

13. 08. 13. 08. $\vdash : x \varepsilon M \supset : y \varepsilon \mu \text{`} x \cdot \overline{\overline{\mathrm{D}}} \cdot y \varepsilon \mathrm{Elm} \cdot \wedge \cdot (\mathrm{E}z) \cdot z \varepsilon x \wedge z \equiv y .$

13. 081. 13. 081. $\vdash \cdot x \varepsilon \mathrm{MS} \overline{\overline{\mathrm{D}}} \cdot (\mathrm{E}y) \cdot y \varepsilon M \wedge x \equiv \mu \text{`} y .$

13. 082. 13. 082. $\vdash : x . y \varepsilon \mathrm{MS} \supset : x \subset y \cdot \overline{\overline{\mathrm{D}}} \cdot (z) \cdot z \varepsilon x \supset z \varepsilon y .$

13. 083. 13. 083. $\vdash \cdot x , y \varepsilon \mathrm{MS} \supset \cdot x \equiv y \overline{\overline{\mathrm{D}}} x \subset y \wedge y \subset x .$

Bemerkung. $\mu \text{`} x$ ist die zur Menge M gehörige *Mengenspezies*, welche durch die Eigenschaft der Identität mit einem Element von x definiert wird. Wie durch Einführung des Begriffes Mengenspezies eine Vereinfachung der Betrachtungen aus Int. Math. I erzielt werden kann, entnehme ich einer Mitteilung von Hrn. Prof. Brouwer.

13. 12. $\vdash \vdash x \varepsilon \mathrm{Elm} \supset \neg (\mathrm{E}y) \, y \varepsilon x .$

13. 22. $\vdash x , y \varepsilon \mathrm{Elm} \wedge x \equiv y \supset x \equiv y .$ Beweis. |13. 05|.

13. 23. $\vdash x . y \varepsilon M \wedge x \equiv y \supset x \equiv y .$ Beweis. |6. 26, 13. 06, 13. 07|.

13. 24. $\vdash x , y \varepsilon M \wedge x \equiv y \supset y \equiv x .$ Beweis. |13. 07|.

13. 25. $\vdash x , y \varepsilon \mathrm{Elm} \wedge x \equiv y \supset y \equiv x .$ Beweis. |13. 05|.

13. 26. $\vdash x . y . z \varepsilon \mathrm{Elm} \wedge x \equiv y \wedge y \equiv z \supset x \equiv z .$

Beweis. $\vdash : \cdot \mathrm{Hyp.} \supset : \cdot (p) : \cdot p \varepsilon N \wedge \mathrm{St}_p \text{`} \rho \text{`} x , \mathrm{St}_p \text{`} \rho \text{`} z \varepsilon \underset{\sim}{\mathrm{R}}_p : \supset :$
|6. 11| $x \text{`} p \equiv z \text{`} p \vee \neg (x \text{`} p \equiv z \text{`} p) : \wedge :$
|12. 31. 13. 05, 6. 452|
$(q) \cdot q \varepsilon Z \text{`} p \supset \sigma (t \text{`} q) \tau (\mathrm{St}_q \text{`} \rho \text{`} y \frown \mathrm{R}_{q+1}) \cdot \supset \cdot x \text{`} p \equiv y \text{`} p \equiv z \text{`} p : \supset :$
|12. 34| $x \text{`} p \equiv z \text{`} p : \cdot \supset : .$ |13. 05| $x \equiv z .$

13. 27. $\vdash x , y , z \varepsilon M \wedge x \subset y \wedge y \subset z \supset x \subset z .$

Beweis. $\vdash : : \cdot \mathrm{Hyp.} \supset : : \cdot$ |13. 05| $(p) : : \cdot p \varepsilon x \supset : :$
$(\mathrm{E}q) \cdot q \varepsilon y \wedge q \equiv p : \wedge : (q) : q \varepsilon y \supset \cdot (\mathrm{E}s) \cdot s \varepsilon z \wedge z \equiv q : : \supset : :$
|6. 82| $(\mathrm{E}q) : \cdot q \varepsilon y \wedge q \equiv p : \wedge : q \varepsilon y \cdot \supset \cdot (\mathrm{E}s) \cdot s \varepsilon z \wedge s \equiv q : : \supset : :$
|6. 52| $(\mathrm{E}q) : q \varepsilon y \wedge q \equiv p \cdot \wedge \cdot (\mathrm{E}s) \cdot s \varepsilon z \wedge s \equiv q : : \supset : :$
|6. 82, 6. 52| $(\mathrm{E}q) \cdot (\mathrm{E}s) \cdot q \varepsilon y \wedge q \equiv p \wedge s \varepsilon z \wedge s \equiv q : : \supset : :$
|6. 82| $(\mathrm{E}q) \cdot (\mathrm{E}s) \cdot s \varepsilon z \wedge s \equiv p : : \supset : :$
|6. 51| $(\mathrm{E}s) \cdot s \varepsilon z \wedge s \equiv p : : \cdot \supset : : .$
|13. 06| $x \subset z .$

13. 28. $\vdash x , y , z \varepsilon M \wedge x \equiv y \wedge y \equiv z \supset x \equiv z .$

Beweis. |13. 27, 13. 07, 13. 24|.

13. 3. $\vdash \cdot x \varepsilon MS \wedge y \varepsilon Elm \wedge \cdot (Ez) \cdot z \varepsilon x \wedge z \equiv y \cdot \supset \cdot y \varepsilon x$.

Beweis. $\vdash : Hyp. \supset :$ [13. 081. 6. 62]
$(Eu) : u \varepsilon M \wedge x \equiv \mu ` u \wedge \cdot (Ez) \cdot z \varepsilon x \wedge z \equiv y : \supset :$
[13. 08] $(Ez) \cdot (Et) \cdot t \varepsilon u \wedge t \equiv z \wedge z \equiv y : \supset :$
[13. 26] $(Ez) \cdot (Et) \cdot t \varepsilon u \wedge t \equiv y : \supset :$
[6. 51] $(Et) \cdot t \varepsilon u \wedge t \equiv y : \supset :$
[13. 08] $(Et)\, y \varepsilon x : \supset :$
[6. 51] $y \varepsilon x$.

13. 31. $\vdash x \varepsilon MS \supset x \equiv x$.

Beweis. $\vdash \cdot x \varepsilon MS \cdot \supset \cdot$ [13. 081] $(Ey) \cdot y \varepsilon M \wedge x \equiv \mu ` y \cdot \supset \cdot$
[6. 451] $(Ey) \cdot x \equiv x \cdot \supset \cdot$ [6. 51] $x \equiv x$.

13. 32. $\vdash x, y \varepsilon MS \wedge x \equiv y \supset x \equiv y$.

Beweis. [13. 083, 6. 26].

13. 33. $\vdash x, y \varepsilon MS \wedge x \equiv y \supset y \equiv x$.

Beweis. [13. 083].

13. 34. $\vdash x, y \varepsilon MS \wedge x \subset y \wedge y \subset z \supset x \subset z$.

Beweis. [13. 082, 6. 411].

13. 35. $\vdash x, y \varepsilon MS \wedge x \equiv y \wedge y \equiv z \supset x \equiv z$.

Beweis. [13. 083, 13. 34].

§ 15. Const. S, ⌞, ⌝, $\equiv$, $\leftrightarrow$. (*Abkürzungen*).

Vorbemerkung. S bedeutet Spezies, S_p Spezies p^{ter} Ordnung.

15. 001. 15. 001. $\vdash x \varepsilon S_0 \overline{\overline{D}}\, x \varepsilon Elm \vee x \varepsilon MS$.

15. 01. 15. 01. $\vdash : x \varepsilon S_1 \overline{\overline{D}} : (y) : y \varepsilon x \cdot \supset \cdot y \varepsilon S_0 \cdot \wedge \cdot (z) \cdot z \varepsilon S_0 \wedge z \equiv y \supset z \varepsilon x$.

15. 02. 15. 02. $\vdash : \cdot p \varepsilon N \supset : \cdot x \varepsilon S_{p+1} : \overline{\overline{D}} :$
$x \varepsilon S_p : \vee : (y) : y \varepsilon x \cdot \supset \cdot y \varepsilon S_p \cdot \wedge \cdot (z) \cdot z \varepsilon S_p \wedge z \equiv y \supset z \varepsilon x$.

15. 03. 15. 03. $\vdash \cdot x \varepsilon S \overline{\overline{D}} \cdot (Ep) \cdot p \varepsilon N \wedge x \varepsilon S_p$.

15. 04. 15. 04. $\vdash : p \varepsilon N \wedge x, y \varepsilon S_p : \supset : x \equiv y \cdot \overline{\overline{D}} \cdot (z) \cdot z \varepsilon x \supset \subset z \varepsilon y$.

15. 05. 15. 05. $\vdash : p \varepsilon N \wedge y \varepsilon S_p : \supset : x \subset y \cdot \overline{\overline{D}} \cdot (z) \cdot z \varepsilon x \supset z \varepsilon y$.

15. 06. 15. 06. $\vdash : p \varepsilon N \wedge y \varepsilon S_p : \supset : x \not\subset y \cdot \overline{\overline{D}} \cdot x \subset y \cdot \wedge \cdot (Ez) \cdot z \varepsilon y \wedge \neg (z \varepsilon x)$.

15. 07. 15. 07. $\vdash : p \varepsilon N \wedge y \varepsilon S_p \wedge x \subset y \cdot \supset \cdot z \varepsilon y \llcorner x \overline{\overline{D}}\, z \varepsilon y \wedge \neg (z \varepsilon x)$.

15. 08. 15. 08. $\vdash : p \varepsilon N \wedge x, y \varepsilon S_p : \supset : x \urcorner y \cdot \overline{\overline{D}} \cdot (Ez) \cdot z \varepsilon x \wedge \neg (z \varepsilon y)$.
$x \urcorner y$ bedeutet also: »x ragt aus y heraus«[1].

[1] In der Definition, Int. Math. I. S. 246, sind wohl einmal M und N verwechselt.

15. 09. 15. 09. $\vdash \cdot p \in N \wedge x, y \in S_p \supset \cdot x \overline{\overline{\equiv}} y \overline{\overline{D}} \neg (x \urcorner y) \wedge \neg (y \urcorner x)$.

$\overline{\overline{\equiv}}$ bedeutet »kongruent«.

15. 10. 15. 10. $\vdash : p \in N \wedge x, y \in S_p \supset : x \leftrightarrow y \overline{\overline{D}} \cdot \neg (Ez) \cdot z \in x \wedge z \in y$.

$x \leftrightarrow y$ bedeutet also: »x und y sind elementefremd«.

15. 2. $\vdash \vdash \cdot p \in N \wedge x \in S_p \supset \cdot x \overline{\overline{\equiv}} y \supset C\, y \in S_p \wedge x \overline{\overline{\equiv}} y$.

15. 21. $\vdash x \in S \supset x \overline{\overline{\equiv}} x$.

Beweis. [15. 03, 15. 04, 15. 2, 6. 51].

15. 22. $\vdash \cdot p \in N \wedge x \in S_p \wedge \cdot (Ez) \cdot z \in x \wedge z \overline{\overline{\equiv}} y \cdot \wedge y \in S_{p-1} \cdot \supset y \in x$.

Beweis. $\vdash \cdot$ Hyp. $\supset \cdot$ [15. 02] $(Ez) \cdot y \in x \cdot \supset \cdot$ [6. 51] $y \in x$.

15. 3. $\vdash p \in N \wedge x, y \in S_p \wedge x \overline{\overline{\equiv}} y \supset x \equiv y$.

Beweis. [15. 04, 6. 26].

15. 31. $\vdash p, q \in N \wedge x \in S_p \supset x \in S_{p+q}$.

Beweis. [15. 02] $\vdash$ Hyp. $\supset x \in S_{p+1}$. (1)

[15. 02] $\vdash \cdot$ Hyp. $\supset \cdot (s) \cdot s \in N \wedge x \in S_{p+s} \supset x \in S_{p+s+1}$. (2)

[(1), (2), 10. 14] $\vdash \cdot$ 15. 31.

15. 32. $\vdash p \in N \wedge x, y, z \in S_p \wedge x \subset y \wedge y \subset z \supset x \subset z$.

Beweis. [15. 05].

15. 33. $\vdash p \in N \wedge x, y \in S_p \wedge x \equiv y \supset y \equiv x$.

Beweis. [15. 04].

15. 34. $\vdash p \in N \wedge x, y, z \in S_p \wedge x \equiv y \wedge y \equiv z \supset x \equiv z$.

Beweis. [15. 04, 15. 05, 15. 32].

15. 35. $\vdash p \in N \wedge x, y, z, u \in S_p \wedge x \subset y \wedge x \equiv z \wedge y \equiv u \supset z \subset u$.

Beweis. [15. 04, 15. 05] $\vdash$ Hyp. $\supset z \subset x \wedge x \subset y \wedge y \subset u \supset$
[15. 32] $z \subset u$.

15. 37. $\vdash p \in N \wedge x, y, z \in S_p \wedge x \subset y \wedge y \notin z \supset x \notin z$.

Beweis. [15. 32] $\vdash$ Hyp. $\supset x \subset z$. (1)

[15. 06] $\vdash \cdot$ Hyp. $\supset \cdot (Eu) \cdot u \in z \wedge \neg (u \in y) \cdot \supset \cdot$
[15. 05, 4. 2, 6. 25] $(Eu) \cdot u \in z \wedge \neg (u \in x)$. (2)

[(1), (2), 15. 06] $\vdash \cdot$ 15. 37.

15. 38. $\vdash p \in N \wedge x, y, z \in S_p \wedge x \notin y \wedge y \subset z \supset x \notin z$.

Beweis. [15. 32] $\vdash$ Hyp. $\supset x \subset z$. (1)

[15. 06] $\vdash \cdot$ Hyp. $\supset \cdot (Eu) \cdot u \in y \wedge \neg (u \in x) \cdot \supset \cdot$
[15. 05, 6. 52] $(Eu) \cdot u \in z \wedge \neg (u \in x)$. (2)

[(1), (2), 15. 06] $\vdash \cdot$ 15. 38.

15.39. $\vdash p \in N \wedge x, y, z, u \in S_p \wedge x \notin y \wedge x \equiv z \wedge y \equiv u \supset z \notin u$.

Beweis. $[15.04, 15.05] \vdash \text{Hyp.} \supset z \subset x \wedge x \notin y \wedge y \subset u \supset$
$[15.37, 15.38] \; z \notin u$.

15.4. $\vdash p \in N \wedge x, y, z, u \in S_p \wedge x \subset y \wedge x \equiv z \wedge y \equiv u \supset y \smile x \equiv u \smile z$.

Beweis. $[15.07, 15.04, 4.2]$.

15.41. $\vdash p \in N \wedge x, y \in S_p \wedge x \subset y \supset x \subset y \smile (y \smile x)$.

Beweis. $[15.07] \vdash \cdot \text{Hyp.} \supset \cdot (z) \cdot z \in y \smile x \supset \neg (z \in x) \cdot \supset \cdot$
$[4.21] (z) \cdot z \in x \supset \neg (z \in y \smile x) : \supset :$
$[15.05, 15.07] \vdash \cdot 15.41$.

15.42. $\vdash : p \in N \wedge x, y \in S_p \wedge x \subset y \supset \neg (y \smile (y \smile x) \urcorner x)$.

Beweis. $[15.06] \vdash : \text{Hyp.} \supset : (z) : z \in y \supset \cdot \neg (z \in x) \supset z \in y \smile x \cdot \supset \cdot$
$[4.2] \; \neg (z \in y \smile x) \supset \neg \neg (z \in x) : \supset :$
$[15.07] \; (z) \cdot z \in y \smile (y \smile x) \supset \neg \neg (z \in x) : \supset :$
$[4.521] \; (z) \cdot \neg (z \in y \smile (y \smile x) \wedge \neg (z \in x)) : \supset :$
$[6.7] \; \neg (Ez) \cdot z \in y \smile (y \smile x) \wedge \neg (z \in x)$.

15.43. $\vdash p \in N \wedge y \in S_p \wedge x \subset y \supset \neg (x \urcorner y)$.

Beweis. $[15.05] \vdash \cdot \text{Hyp.} \supset \cdot (z) \cdot z \in x \supset z \in y \cdot \supset \cdot$
$[4.9] (z) \cdot \neg (z \in x \wedge \neg (z \in y)) \cdot \supset \cdot$
$[6.7] \; \neg (Ez) \cdot z \in x \wedge \neg (z \in y)$.

15.44. $\vdash p \in N \wedge y \in S_p \wedge x \subset y \supset y \smile (y \smile x) \mathrel{\dot{\equiv}} x$.

Beweis. $[15.41, 15.43, 15.42, 15.09]$.

15.45. $\vdash \neg (x \urcorner y) \wedge \neg (y \urcorner z) \supset \neg (x \urcorner z)$.

Beweis. $\vdash \cdot \neg (x \urcorner y) \cdot \supset \cdot \; [15.08, 6.71] \; (u) \cdot \neg (u \in x \wedge \neg (u \in y))$
$\cdot \supset \cdot \; [4.52] \; (u) \cdot u \in x \supset \neg \neg (u \in y)$. (1)
$[(1)] \vdash : \text{Hyp.} \supset :$
$(u) : u \in x \supset \neg \neg (u \in y) \cdot \wedge \cdot u \in y \supset \neg \neg (u \in z) : \supset :$
$[4.22, 4.32, 2.13] (u) : u \in x \supset \neg \neg (u \in z) : \supset :$
$[4.521] (u) \cdot \neg (u \in x \wedge \neg (u \in z)) : \supset :$
$[6.7] \; \neg (Eu) \cdot u \in x \wedge \neg (u \in z)$.

15.46. $\vdash p \in N \wedge x, y, z \in S_p \wedge x \mathrel{\dot{\equiv}} y \wedge y \mathrel{\dot{\equiv}} z \supset x \mathrel{\dot{\equiv}} z$.

Beweis. $[15.09, 15.45]$.

Ausgegeben am 13. Mai.